RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 marzo 1909.

F. D' Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Alcune osservazioni sopra proprietà atte ad individuare una funzione.* Nota del Socio Vito Volterra.

1. *Insieme corrispondente ad un punto.* — Abbiasi un campo finito a due dimensioni [1] limitato da un contorno. Ad ogni punto A interno al campo faremo corrispondere un insieme di elementi interni al campo stesso. Lo diremo l'*insieme corrispondente al punto* A e lo denoteremo con E(A).

Questo insieme potrà essere costituito da un numero finito di punti o di linee o di aree o anche da un insieme enumerabile di tutti questi elementi o di parte di essi.

2. *Massa dell'insieme corrispondente al punto* A. — Supponiamo distribuita in E(A) una massa e questa sia tale che ogni elemento di E(A) abbia una massa o una densità positiva in modo che, se il punto A' appartiene ad E(A), la massa contenuta entro ogni cerchio avente per centro A sia un numero diverso da zero, finito e positivo. Denoteremo con M(A) la massa totale distribuita in E(A). Potrà darsi che un medesimo punto B appartenga contemporaneamente, tanto all'insieme corrispondente ad un punto A, quanto all'insieme corrispondente ad un punto A'. La massa o la densità distribuita in B, considerato come appartenente ad E(A), sarà in generale diversa

[1] È evidente che le osservazioni seguenti possono estendersi al caso di campi di un numero qualunque di dimensioni.

dalla massa o densità distribuita in B considerato come appartenente ad E(A').

3. *Potenziale di una funzione u sulla massa* M(A). — Sia $u(x, y)$ una funzione qualsiasi finita e assolutamente continua in tutto il campo σ; ammetteremo che, operando su $u(x, y)$ come sopra una funzione potenziale, si possa calcolarne il potenziale sulla massa M(A) mediante somme o integrali estesi agli elementi costituenti l'insieme E(A). Lo chiameremo il *potenziale della funzione u sulla massa* M(A) e lo indicheremo con $P[u, M(A)]$.

4. *Connessione.* — Preso un punto A consideriamo un punto A' appartenente ad E(A), quindi un punto A'' appartenente ad E(A'), poi un punto A''' appartenente ad E(A'') e così di seguito.

I punti $A, A', A'', A''', \ldots$ diremo che formano un *seguito di punti connessi.*

Diremo poi che *un punto* A *è connesso col contorno di* σ, se, scelto un numero ε comunque piccolo, potremo sempre trovare un seguito finito di punti $A, A', A'', A''', \ldots$ connessi, uno dei quali dista da un punto del contorno meno di ε.

5. Teorema I. — *La funzione u assolutamente continua e finita nel campo* σ *è determinata quando*: 1°) *in ogni punto* A *interno al campo si conosce*

$$\frac{1}{M(A)} P[u, M(A)] - u(A);$$

2°) *si conoscono i valori della funzione u al contorno del campo*; 3°) *tutti i punti interni al campo sono connessi col contorno.*

Per dimostrare questo teorema basterà dimostrare che, se u è nulla al contorno, e per i punti interni si ha

$$\frac{1}{M(A)} P[u, M(A)] - u(A) = 0, \tag{1}$$

u è nulla internamente al campo. Infatti se, sotto queste condizioni, u non fosse sempre nulla internamente al campo, dovrebbe avere nell'interno almeno un massimo o un minimo diversi da zero. Per fissare le idee supponiamo che nel punto interno A si abbia un massimo G. Allora u dovrà avere il valore G in tutti i punti di E(A), perchè se in un punto B di E(A), u avesse un valore G' inferiore a G, si potrebbe trovare un cerchio ω avente per centro B nei punti del quale u sarebbe inferiore a $\frac{G' + G}{2}$. La porzione della massa M(A) contenuta entro ω deve essere per dato diversa da zero, finita e positiva; chiamandola m avremmo per conseguenza

$$\frac{1}{M(A)} P[u, M(A)] < G - \frac{G - G'}{2} \frac{m}{M}$$

e quindi, essendo $u(A) = G$, la (1) non potrebbe sussistere.

Ora, se u assume il valore G in tutti i punti di E(A), e se A′ appartiene ad E(A), u dovrà avere il valore G in tutti i punti di E(A′) e così, se A″ appartiene a questo insieme, u dovrà avere il valore G in tutti i punti di E(A″) e così di seguito.

Ora se ogni punto A interno è connesso col contorno, scelto ε piccolo ad arbitrio potremo trovare un punto interno che dista da un punto del contorno meno di ε ed in cui u assume il valore G. Ne segue, per la continuità uniforme di u, che G deve essere minore di qualunque quantità assegnabile, e perciò l'esistenza del massimo interno al campo è impossibile.

Teorema II. — *La funzione u finita e assolutamente continua nel campo σ è determinata quando per ogni punto* A *interno al campo si conosce*

$$\frac{1}{\alpha M(A)} P[u, M(A)] - u(A), \tag{2}$$

essendo α un coefficiente il cui limite inferiore è maggiore di 1.

Proviamo che se la (2) è nulla, u deve esser sempre nulla. Infatti se u in A avesse un valore G diverso da zero, dovrebbe esistere un punto A′ appartenente ad E(A) in cui u avrebbe un valore assoluto eguale o superiore ad $\alpha'|G|$, rappresentando con α' il limite inferiore di α; e di qui si ricava che dovrebbe esistere un punto A″ appartenente ad E(A′) in cui u assumerebbe un valore assoluto, eguale o superiore ad $\alpha'^2|G|$ e così di seguito indefinitamente. Dunque esisterebbero valori di u tali che il loro valore assoluto sarebbe tanto grande quanto ci piace.

Teorema III. — *Due funzioni finite e continue assolutamente nel campo σ, tali che calcolando in ogni punto interno*

$$\frac{1}{\alpha M(A)} P[u, M(A)] - u(A)$$

si trova per ambedue lo stesso valore, debbono essere eguali fra loro in qualche punto interno o del contorno del campo, se il limite superiore di α è minore di 1.

Mi risparmio di dare la dimostrazione ben facile di questa proposizione.

6. *Esempio.* — Supponiamo che E(A) sia una circonferenza C_A avente il centro in A e la densità con cui è distribuita la massa sia 1. Allora il teorema I, del § 5 diverrà: *La funzione u assolutamenle continua nel campo σ è determinata quando*: 1°) *si conosce per ogni punto* A *interno al campo la differenza fra il valore medio di u sopra* C_A *e il valore al centro*; 2°) *si conoscono i valori di u al contorno del campo*; 3°) *tutti i punti interni al campo sono connessi col contorno.*

Supposto ora che il teorema di esistenza delle funzioni armoniche valga pel campo σ, avremo in particolare la proposizione: *se la differenza fra il*

valore medio di u sopra C_A *e il valore al centro sarà nulla, la funzione sarà armonica.*

7. Già da vario tempo ero in possesso delle precedenti osservazioni che non avevo però reso note; mi sono permesso di pubblicarle avendo letto la interessante Nota del prof. E. Levi inserita in questi Rendiconti: *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche* (1). Se si suppone la condizione della continuità assoluta della funzione u, affinchè possa dirsi che essa è armonica, non è necessario sapere che il suo valore in ogni punto è la media dei valori che assume sopra *tutte* le circonferenze interne al campo e aventi il centro in quel punto; basta sapere che la proprietà sussiste per *una sola* di dette circonferenze, purchè esista la connessione col contorno. Ma è da osservare che in tal modo la condizione posta della continuità non può togliersi, anche supponendo la integrabilità di u lungo le circonferenze C_A e la integrabilità superficiale. Ciò caratterizza la differenza che passa colla proposizione del Levi.

Si può riconoscere facilmente questo con un esempio. Supponendo che r rappresenti la distanza del centro da un punto generico, prendiamo una funzione u eguale a $-\log r$ in tutti i punti della corona circolare compresa fra la circonferenza C di raggio 1 e quella C′ concentrica di raggio $\frac{1}{4}$, esclusi però i punti di quest'ultima circonferenza. Si prenda quindi come valore di u in un punto qualsiasi A della circonferenza C′ o interno ad essa il valore medio che assume u in una circonferenza C_A avente il centro in quel punto e giacente internamente alla corona circolare. D'altra parte ad ogni punto A interno alla corona si può far corrispondere una circonferenza C_A avente il centro in quel punto e giacente internamente alla corona stessa (ma non avente nell'interno il cerchio C′) in modo che tutti i punti interni alla corona siano connessi coi punti della circonferenza C di raggio 1 che forma il contorno dell'intero campo circolare che si considera.

Avremo allora: 1°) u sarà compreso fra 0 e $\log 4$; 2°) la differenza fra il valore medio di u in C_A e il valore di u in A sarà nulla; 3°) tutti i punti A interni a C saranno connessi col contorno, e nondimeno la funzione u non sarà armonica perchè si annullerà al contorno C e non sarà nulla nell'interno del campo. È evidente che u sarà discontinua, e che si potrà limitarne la discontinuità solo ai punti della circonferenza C′.

Farò per ultimo osservare che le considerazioni svolte nel § 5, hanno relazione da un lato col calcolo delle differenze finite, mentre d'altro lato sono intimamente collegate colle questioni delle equazioni integrali; in particolare il Teorema I è collegato coi casi in cui il determinante si annulla.

(1) Il dott. Umberto Crudeli mi comunica che, indipendentemente dalle mie antecedenti ricerche, egli era giunto a dimostrare lo stesso teorema del Levi ricorrendo alla considerazione di massimi o minimi interni, ma con condizioni più restrittive di quelle poste dal Levi.

Matematica. — *Sopra la teoria dei moduli di forme algebriche.* Nota del Socio E. Bertini.

Parassitologia vegetale. — *Sopra una Erisifacea parassita del pesco in rapporto col nuovo oidio delle quercie.* Nota del Socio G. Cuboni e di L. Petri.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Zoologia. — *Descrizioni preliminari di varî Artropodi, specialmente d'America.* Nota del Corrispondente F. Silvestri.

IV.

Nuovi *Geophilomorpha (Chilopoda).*
Fam. *Gonibregmatidae.*
Gen. *Macronicophilus* nov.

La lamina cefalica è tanto lunga quanto larga. Il labbro è libero ed è formato da un pezzo impari largo, col margine profondamente pettinato. Le mandibole terminano con una lamina pettinata. Il palpo labiale oltre l'articolo basale, saldato al suo opposto, è formato da quattro articoli liberi, dei quali l'ultimo è carnoso come gli altri e non unguiforme. I piedi mascellari hanno l'unghia molto lunga e tutti gli articoli inermi.

La lamina basale è molto larga, rettangolare. Gli sterniti sono forniti di pori. Le subcoxe dell'ultimo paio di zampe hanno numerosi pori. Tali zampe, oltre le subcoxe, hanno sei articoli liberi dei quali il sesto è unguiforme. Esistono anche i pori anali.

Specie tipica:

Macronicophilus Ortonedae sp. n.

I piedi mascellari flessi non raggiungono il margine frontale per uno spazio abbastanza grande. Gli sterniti dal primo all'ultimo hanno una grande area porosa o quasi triangolare o rotondeggiante. Lo sternite dell'ultimo segmento pedifero è piccolissimo e di forma triangolare, le zampe dello stesso segmento sono poco più lunghe delle precedenti e attenuate e le subcoxe hanno numerosi pori sopra, lateralmente e sotto.

I segmenti pediferi sono 57 nel ♂ e 59 nella ♀.

La lunghezza del corpo è di mm. 27, la larghezza di 1.

Habitat. Ho esaminato pochi esemplari raccolti a Naranjito presso Guayaquil (Ecuador) dal sig. V. Ortoneda, al quale ho dedicato con piacere la specie.

Fam. *Aphilodontidae* nov.

Labbro affatto rudimentale; mandibole terminate da una lamina pettinata. Mascelle del secondo paio formate dalle subcoxe saldate fra di loro e da tre articoli liberi, dei quali l'ultimo non è unguiforme. I piedi mascellari sono formati dalle subcoxe tra di loro saldate e da tre articoli liberi; le subcoxe non hanno linee chitinee.

Sterniti senza pori.

Le zampe dell'ultimo paio oltre che dalle subcoxe sono formate da cinque articoli liberi dei quali l'ultimo non è unguiforme.

Osservazione. Questa famiglia si distingue dalle altre dell'ordine *Geophilomorpha* per avere i piedi mascellari formati dalle subcoxe e da tre articoli liberi, mentre nelle altre sono di quattro.

Essa comprende il genere *Aphilodon* Silv. e *Mecophilus* nov., che si possono fra di loro così distinguere:

1. Lamina cefalica poco più lunga che larga. Subcoxe dei piedi mascellari meno del doppio più lunghe che larghe . . . . *Aphilodon* Silv.
2. Lamina cefalica notevolmente più lunga che larga. Subcoxe dei piedi mascellari più del doppio più lunghe che larghe. . *Mecophilus* nov.

Specie del genere *Aphilodon* Silv.

Le specie a me note del genere *Aphilodon* si possono fra di loro distinguere nel modo seguente:

1. Numero delle paia di zampe superiore a 60. Sternito dell'ultimo segmento pedifero un poco più lungo che largo (alla base) . . . . . *A. Spegazzinii* Silv. Argentina.
2. Numero delle paia di zampe inferiori a 60.
   3. Sternito dell'ultimo segmento pedifero più lungo che largo alla base. Unghia delle zampe ambulatorie molto assottigliata e piegata alquanto ad arco, quasi il doppio più breve dell'articolo precedente. Numero delle paia di zampe 45 . . . . . *A. modestus* sp. n. Tacurù Pucù (Paraguay).
   4. Sternito dell'ultimo segmento pedifero più largo (alla base) che lungo.
      5. Subcoxe dell'ultimo paio di zampe con una ventina di pori. Numero dei segmenti pediferi (nel maschio) 57, lunghezza del corpo mm. 20, larghezza 0,60 . . . . . *A. intermedius* sp. n. Pampa Piray (Argentina).

6. Subcoxe dell'ultimo paio di zampe con meno di quindici pori.
   7. Pori delle subcoxe dell'ultimo paio di zampe 4-7. Sternito dell'ultimo segmento pedifero poco meno del doppio più largo (alla base) che lungo. Numero dei segmenti pediferi 55-59. Lunghezza mm. 18, larghezza 0,39. . . *A. angustatus* sp. n. Argentina, Paraguay, Matto Grosso.
   8. Pori delle subcoxe dell'ultimo paio di zampe 8-11. Sternito dell'ultimo segmento pedifero circa $^1/_4$ più largo (alla base) che lungo. Numero dei segmenti pediferi 49-55. Lunghezza mm. 25, larghezza 1 . . . . . *A. Weberi* sp. n. Constantia (Africa meridionale).

Mecophilus neotropicus sp. n.

La lamina cefalica è poco più di $^1/_4$ più lunga che larga. I piedi mascellari flessi sorpassano il margine frontale per buon tratto, le sobcoxe più lunghe che larghe, l'articolo ad esse seguente è più del doppio più lungo che largo (alla base) ed è armato verso l'apice di due robusti denti, il terzo articolo è pure armato di un forte dente ed il quarto (o unghia) è poco lungo, uncinato, assottigliato, acuto e fornito di un piccolo dente tuberculiforme alla base.

L'ultimo segmento pedifero ha lo sterno più largo (alla base) che lungo, le subcoxe con otto pori.

Il numero dei segmenti pediferi è di 35 nella femmina.

La lunghezza del corpo è di mm. 8, la larghezza 0,34.

Habitat. Raccolsi l'esemplare descritto nel terriccio presso la cascata dell'Iguazù (Paranà, Brasile).

Fam. *Geophilidae.*

Gen. *Dinogeophilus* nov.

La lamina cefalica è quasi tanto lunga che larga. Le mandibole sono terminate da una lamina pettinata. Le mascelle del secondo paio sono conformate come negli altri *Geophilidae*, ma l'unghia terminale è molto breve. L'unghia dei piedi mascellari un poco innanzi l'estremità presenta due forti denti acuti.

Gli sterniti della parte anteriore del corpo hanno pori ventrali e gli sterniti e i tergiti della parte posteriore del corpo hanno posteriormente un buon numero di tubercoli come piccoli porri.

L'ultimo segmento pedifero ha alle subcoxe un poro e dopo di esse 5 altri articoli che formano il piede, e l'ultimo articolo non è unguiforme.

Osservazione. Questo genere è affine all'*Apogeophilus* Silv., ma se ne distingue facilmente sopratutto per la forma dell'unghia dei piedi mascellari.

Specie tipica:

Dinogeophilus pauropus sp. n.

Il primo sternite non ha pori, mentre i seguenti fino al sesto compreso ne hanno alcuni disposti in un'area mediana allungata a contorno ellittico. I segmenti 26-30 hanno la parte posteriore dei tergiti e specialmente degli sterniti con quattro aree rotondeggianti fornite di piccoli rialzi in forma di porri.

L'ultimo segmento pedifero ha lo sternite molto largo, più del doppio più largo (alla base) che lungo, le subcoxe con un poro coperto dallo sternite e gli altri cinque articoli del piede poco più lunghi delle zampe precedenti.

Il numero dei segmenti pediferi nel maschio è di 31.

Lunghezza del corpo mm. 5,5, larghezza 0,26.

Habitat. L'esemplare descritto fu da me raccolto presso El Salto (Uruguay).

V.

Nuovo genere di *Henicopidae (Chilopoda).*

Gen. *Catanopsobius* nov.

Il corpo è fornito di due paia di stigmi situati ai lati dei segmenti pediferi 3° e 10°.

Le zampe del penultimo ed ultimo paio hanno il tarso uniarticolato come le altre zampe.

Gli altri caratteri di questo genere sono come in *Anopsobius* Silv.

Osservazione. Questo genere si distingue dall'*Anospobius* per avere due paia di stigmi, mentre nell'*Anopsobius* adulto gli stigmi sono in numero di sei paia, che si aprono ai lati dei segmenti pediferi 3°, 5°, 8°, 10°, 12° e 14°. Io scrissi (in Zool. Jahrb. Suppl. VI, Dritter Band, Heft 3, pag. 749) che gli stigmi dell'*Anopsobius* erano due paia, perchè li avevo osservati allora soltanto in un esemplare di *Catanopsobius*, che ritenevo giovane di *Anopsobius*, mentre ora avendo osservato uova molto grandi in un altro esemplare femmina, che presenta gli stessi caratteri, ho dovuto riconoscere che si tratta di due generi distintissimi come appare dalla seguente chiave dicotomica:

1. Stigmi dell'adulto in numero di 8 paia, sui lati dei segmenti pediferi 3°, 5°, 8°, 10°, 12°, 14°. Zampe del paio 13° al 15° col tarso biarticolato . . . . . Gen. *Anopsobius* Silv.
2. Stigmi dell'adulto (femmina) in numero di due paia, sui lati dei segmenti pediferi 3° e 10°. Zampe del paio 13° al 15° col tarso uniarticolato come le precedenti . . . . . Gen. *Catanopsobius* nov.

Catanopsobius chilensis sp. n.

Antenne di 15 articoli. Piedi mascellari forniti di 4 + 4 (o 3 + 4) denti. Lamine dorsali tutte cogli angoli posteriori arrotondati. Pori dell'articolo basale delle zampe del paio 14° e 15° in numero di uno. Zampe del 14° e 15° paio un poco più ingrossate delle precedenti, senza speroni. L'articolo basale del 15° paio di zampe ha l'angolo inferiore-posteriore prolungato in forma di un processo conico breve.

Gli organi genitali femminili terminano con un'unghia intera ed hanno due paia di speroni per lato, dei quali l'interno è molto più piccolo dell'esterno. Lunghezza del corpo mm. 3, larghezza 0,3; lunghezza delle antenne 0,78, delle zampe dell'ultimo paio 0,82.

Habitat. Raccolsi pochi esemplari di questa specie nel legno di alberi putrefatti presso Temuco (Chile).

Matematica. — *Sopra alcuni inviluppi di* ∞^2 *sfere.* Nota di Gustavo Sannia, presentata dal Socio L. Bianchi.

Il prof. Bianchi, nella Memoria « *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante* » (1) pose e risolse alcuni importanti problemi, tra i quali il seguente: *cercare tutti i casi possibili nei quali una falda di un inviluppo di* ∞^2 *sfere ha i raggi di curvatura* r_1, r_2 *legati da una relazione fissa*

$$f(r_1, r_2) = 0,$$

comunque deformando la superficie luogo dei centri delle sfere.

L'A., dopo aver trovato alcune soluzioni particolari notevoli del problema, provò non esservene altre con una elegante analisi.

Ora io ho osservato che questa sussiste integralmente (salvo le conclusioni) *anche se la relazione supposta tra* r_1 *ed* r_2 *varia da un punto all'altro della falda considerata*, ossia sussiste se la funzione f dipende, non solo da r_1 ed r_2, ma anche da elementi indeformabili della superficie luogo dei centri.

Questa osservazione permette di risolvere la quistione più generale di *cercare tutti i casi possibili nei quali una falda di un inviluppo di* ∞^2 *sfere conserva i raggi principali di curvatura* r_1, r_2 *legati da una relazione fissa in ciascun suo punto, comunque si deformi la superficie luogo dei centri.*

Mi limiterò ad accennare le modifiche e le giunte che basta apportare

(1) Annali di matematiche, serie 3ª, t. III, 1899.

alla ricerca del prof. Bianchi, ricerca che l'A. ha riportato nelle *Lezioni di Geometria Differenziale* (vol. II, § 253 e segg.).

Sia S_0 la superficie luogo dei centri M_0 delle ∞^2 sfere di raggio T, Σ e Σ_1 le due falde dell'inviluppo, M ed M_1 i punti ove la sfera di centro M_0 tocca Σ e Σ_1. Le rette $M_0 M$ ed $M_0 M_1$ sono le normali alle due falde in M ed M_1, e generano quindi due congruenze di normali C e C_1, riflesse l'una dell'altra rispetto ad S_0. Si prova facilmente (§ 253) che, se S_0 si deforma trascinando seco le sfere, i punti M ed M_1 serbano sulla sfera una posizione invariabile rispetto al piano tangente di S_0 in M_0.

Su S_0 prendiamo come linee coordinate u quelle che sono normali ai raggi delle congruenze C e C_1 e come linee v le loro traiettorie ortogonali, e diciamo $\sigma = \sigma(u, v)$ l'angolo di inclinazione del raggio $M_0 M$ di S su S_0, cioè sulla linea v, angolo che non varia flettendo M_0, per l'osservazione precedente.

Detto

$$ds_0^2 = E_0\, du^2 + G_0\, dv^2$$

l'elemento lineare di S_0, allora (§§ 254-255) l'angolo σ risulta legato ai coefficienti di ds_0^2 dalla relazione

$$\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{E_0}\cos\sigma) = 0\,, \tag{1}$$

il raggio T risulta essere una funzione della sola u definita da

$$\frac{dT}{du} = -\sqrt{E_0}\cos\sigma \tag{2}$$

ed i raggi principali di curvatura r_1, r_2 di Σ risultano definiti da

$$r_1 + r_2 = 2T + \frac{N}{M}\,,\quad r_1 r_2 = T^2 + T\frac{N}{M} - \frac{\sqrt{E_0 G_0}\,\mathrm{sen}\sigma}{M}\,,$$

ove M ed N sono certe funzioni lineari dei coefficienti della seconda forma fondamentale di S_0 e che per brevità non trascriviamo.

Le formole corrispondenti per Σ_1 si hanno semplicemente cambiando σ in $-\sigma$.

I. Ciò premesso, supponiamo in primo luogo che sia $\sigma = 0$; allora C e C_1 coincidono in una congruenza di tangenti di S_0, e Σ, Σ_1 coincidono con una evolvente di S_0. Ciò risulta pure dall'osservare che la (1) dà $\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} = 0$, e

quindi si può porre $E_0 = 1$, e che la (2) dà $T = -u + \text{cost}$. Inoltre allora $r_1 + r_2$, $r_1 r_2$ risultano indipendenti dai coefficienti della seconda forma fondamentale di S_0, cioè indeformabili. Abbiamo dunque una prima soluzione del problema: la S_0 è una superficie qualunque, e le due falde Σ, Σ_1 dell'inviluppo di sfere coincidono con una evolvente di S_0; flettendo S_0, non mutano singolarmente i raggi principali di curvatura di Σ.

II. Or supponiamo $\sigma = \frac{\pi}{2}$. T *è costante*, e *le due falde* Σ *e* Σ_1 *sono superficie parallele ad* S_0 (che è arbitraria).

III. Se $M = 0$ per tutte le flessioni di S_0, allora (§ 261) S_0 *è sviluppabile e quando si distende sul piano, i raggi della congruenza* C (C_1) *debbono diventar paralleli;* Σ (Σ_1) *è anch'essa una sviluppabile.*

IV. La relazione supposta sia del tipo

$$r_1 + r_2 = f(u, v).$$

ove f è una funzione assegnata di u, v. Si trova che deve essere necessariamente f costante; onde, sostituendo a Σ una superficie parallela, si può rendere $r_1 + r_2 = 0$ e si cade in una soluzione nota (§ 257): *le due falde di un inviluppo di sfere che hanno il centro sul paraboloide di rotazione e passano per il fuoco sono ad area minima, e si conservano tali comunque deformando il paraboloide.*

Non ottenendo un risultato nuovo, ci dispensiamo dal fare i calcoli, per non sorpassare i limiti imposti alla Nota. Del resto essi sono analoghi a quelli dei §§ 256, 257.

V. Ora, *esclusi tutti i casi precedenti*, passiamo alla ricerca generale, assegnando una funzione f di r_1, r_2, u, v e cercando gli inviluppi di sfere nei quali una falda Σ ha i raggi di curvatura r_1, r_2 legati dalla relazione $f(r_1, r_2, u, v) = 0$, per tutte le deformazioni della superficie S_0 luogo dei centri, relazione che può sempre ridursi all'altra:

$$r_1 r_2 = F(r_1 + r_2; u, v). \tag{3}$$

ora F è una funzione dei tre argomenti $r_1 + r_2, u, v$.

Nel § 261 il prof. Bianchi discute il caso in cui F non dipende da u e v; come ho dichiarato in principio, i ragionamenti sussistono inalterati quando F dipende da u e v, e provano che [1])

$$\sqrt{E_0} = 1 \ , \ \sqrt{G_0} = \cot\sigma \ , \ \sigma = \sigma(u),$$

quindi

$$ds_0^2 = du^2 + \cot^2\sigma\, dv^2,$$

[1]) Veramente l'A. esclude che la relazione supposta sia del tipo $r_1 r_2 = \text{cost}$, avendo già esaminato a parte questo caso. Ma la discussione del § 261 vale anche in tal caso, e però noi non escludiamo che la (3) sia del tipo $r_1 r_2 = F(u, v)$.

e però S_0 è applicabile sopra una superficie di rotazione;

$$(4)\qquad \begin{cases} r_1 r_2 = T^2 - T\dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\sigma'} + \dfrac{T(3\sigma'^2\cot\sigma - \sigma'')}{M\sigma'}, \\ r_1 + r_2 = 2T - \dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\sigma'} + \dfrac{3\sigma'^2\cot\sigma - \sigma''}{M\sigma'}; \end{cases}$$

la relazione supposta (3) dev'essere del tipo

$$(5)\qquad r_1 r_2 = \alpha(r_1 + r_2) + \beta$$

con α e β funzioni di u, v.

Ora è facile proseguire la ricerca.

Anzitutto dico che α e β *debbono essere funzioni della sola* u.

Infatti S_0 è applicabile sopra una superficie di rotazione e, quando essa affetta questa forma, siccome il saggio $T(u)$ non varia lungo un parallelo $u =$ costante, è chiaro che anche la falda Σ dell'inviluppo di sfere è una superficie di rotazione, sulla quale le linee $u =$ cost. saranno i paralleli. Dunque anche su Σ, *nella attuale configurazione*, lungo una $u =$ cost. saranno costanti r_1, r_2, e quindi $r_1 r_2, r_1 + r_2$: cioè $r_1 r_2$ ed $r_1 + r_2$ saranno funzioni della sola u; inoltre la relazione (5) è necessariamente la stessa in tutti i punti del parallelo $u =$ cost: dunque α e β debbono essere indipendenti da v.

Flettendo ora S_0, α e β debbono rimanere fisse in ciascun punto, per ipotesi, dunque per ogni configurazione di S_0 saranno α e β funzioni fisse della sola u.

Ciò posto la (5) moltiplicata per M diventa, per le (4),

$$[(T^2 - \beta)\sigma' - T(2\alpha + \operatorname{sen}\sigma) + \alpha\operatorname{sen}\sigma]M + (T - \alpha)(3\sigma'^2\cot\sigma - \sigma'') - \sigma'\cos\sigma = 0$$

e, dovendo aver luogo flettendo comunque S_0 e quindi variando M, si scinde nelle altre due

$$(6)\qquad (T^2 - 2\alpha T - \beta)\sigma' - (T - \alpha)\operatorname{sen}\sigma = 0,$$

$$(7)\qquad (T - \alpha)(3\sigma'^2\cot\sigma - \sigma'') - \sigma'\cos\sigma = 0.$$

Dunque, affinchè il problema ammetta una effettiva soluzione è necessario e sufficiente che sieno soddisfatte le (2), (6) e (7). Or queste sono compatibili, perchè, essendo $E_0 = 1$, la (2) diventa

$$\frac{dT}{du} = -\cos\sigma$$

e dà T con una quadratura; le (6) e (7) dànno poi α e β.

Si osservi infine che queste formole non si alterano cambiandovi σ in $-\sigma$.

Abbiamo così questa nuova ed ultima soluzione: S_0 *è una superficie applicabile sopra una superficie di rotazione e, ridotto il suo elemento lineare alla forma*

$$ds_0^2 = du^2 + \cot^2\sigma(u)dv^2,$$

il raggio delle sfere è

$$T = c - \int \cos\sigma(u)du \qquad (c = \cos t);$$

la relazione che lega i raggi principali di curvatura r_1, r_2 *di ciascuna falda* Σ, Σ_1 *dell'inviluppo di sfere è*

$$r_1 r_2 = \alpha(r_1 + r_2) + \beta,$$

ove

$$\begin{cases} \alpha = T - \dfrac{\sigma' \cos\sigma}{3\sigma'^2 \cot\sigma - \sigma''}, \\ \beta = \dfrac{(2\sigma'^2 \cot\sigma - \sigma'' \operatorname{sen}\sigma)\cos\sigma}{3\sigma'^2 \cot\sigma - \sigma''} - \alpha^2. \end{cases}$$

Riguardando come corrispondenti i due punti di contatto M ed M_1 di una medesima sfera con le due falde Σ e Σ_1 dell'inviluppo, *questi ultimi inviluppi di sfere hanno la proprietà caratteristica che sulle due falde* Σ *e* Σ_1 *si corrispondono le linee di curvatura, comunque deformando la superficie* S_0 *luogo dei centri* (§ 262).

Astronomia. — *Determinazione dell'andamento dell'orologio col telescopio zenitale.* Nota di A. Alessio, presentata dal Socio G. Lorenzoni.

1. La diretta considerazione dei luoghi geometrici che nascono dalle osservazioni d'altezza fa conoscere in modo semplice ed evidente che la misura della *differenza* fra due altezze di stelle osservate nel I° verticale una ad E. ed una ad W. permette di determinare la posizione dello zenit sul parallelo della sfera celeste (e quindi il tempo locale) indipendentemente da errori, o differenze, sistematici, allo stesso modo che la misura della differenza fra due altezze di stelle osservate nel meridiano una a N. ed una a S. permette di determinare la posizione dello zenit sul meridiano (e quindi la latitudine, metodo di Horrebow-Talcott) indipendentemente da errori sistematici. L'effetto degli errori d'osservazione e degli errori delle assunte coordinate stellari dovrebbe *a priori* essere il medesimo sulla determinazione del tempo col telescopio zenitale (e con osservazioni prossime al

I° verticale) e sulla determinazione della latitudine col metodo di Talcott. Di fronte a questa conclusione, la quale trova conferma in un più profondo studio critico delle formule relative ai due casi, studiai ed esperimentai il metodo del quale dò qui sommaria notizia.

Il telescopio zenitale è pronto per l'applicazione del metodo quando sia messo sopra tal sostegno e così livellato che, facendo girare il cannocchiale intorno all'asse verticale, la bolla rimanga sempre dentro il campo di lettura: il nord istrumentale deve essere conosciuto con grossolana approssimazione.

Non occorre alcun calcolo preparatorio, non occorre conoscere le coordinate (α e δ) delle stelle da osservare: le formule risolutive sono più semplici di quelle di Mayer per l'istrumento dei passaggi.

Le osservazioni sono fatte nel modo seguente [il telescopio zenitale adoperato, del R. Istituto Idrografico, con un'apertura dell'obbiettivo di mm. 76, con la distanza focale di mm. 920, con un oculare da 68 ingrandimenti, ha tre fili orizzontali mobili e tre fili verticali fissi: sul tamburo del micrometro, ben fissato all'albero della vite, sono praticate due *tacche* in corrispondenza delle divisioni 0(100) e 50: girando il tamburo, il nasino di una molla opportunamente stabilita entrando nelle due tacche permette di fermare successivamente i fili mobili in posizioni distanziate di mezzo giro di micrometro, senza distrarre l'occhio dall'osservazione: il cannocchiale è puntato per l'altezza istrumentale 65°]: I^a serata: col campo oscuro si cerca una stella in prossimità del I° verticale E. (od W.); trovatala e rischiarato convenientemente il campo, con uno qualunque dei fili orizzontali e a partire da una posizione qualunque del micrometro si osserva, col tasto elettrico e cronografo, una serie di altezze (da 25 a 30) distanziate di mezzo giro di micrometro (alla latitudine di 45°, essendo il valore di mezzo giro di micrometro = 30″ circa, l'intervallo fra due successive osservazioni è di circa 3^s, sufficienti per girare il tamburo da una tacca all'altra e disporre il filo *davanti alla stella*): poi *si legge* la livella, si legge l'azimut istrumentale (ad un solo microscopio), si prende nota dell'istante in cui è cominciata l'osservazione, del filo col quale si è osservata la stella e della posizione iniziale del filo stesso e della grandezza della stella (apprezzata dall'osservatore); senza mai muovere il cannocchiale in altezza, si va quindi a cercare un'altra stella in prossimità del I° verticale W. (o E.) e si ripetono le medesime operazioni: si continua ad osservare alternativamente a levante ed a ponente; II^a serata (dopo n giorni, dove n può essere in particolare = 1): si riosservano le medesime stelle della I^a serata, preparando la puntata in azimut prima di ogni osservazione, col medesimo filo orizzontale, a partire dalla medesima posizione del filo ed anche in corrispondenza degli stessi punti del filo orizzontale (riferendosi, per ottener questo, ai fili verticali).

Ogni coppia di stelle osservate una a E. e l'altra ad W. nelle due se-

rate dà un valore del desiderato nk, dove k rappresenta l'andamento diurno dell'orologio: i calcoli da eseguire per ogni coppia di stelle sono questi: per la I^a serata, *stella ad E.*: si fà la media t_1 degli istanti cronografici corrispondenti a 20 osservazioni successive centrali della serie; *stella ad W.*: si calcola come sopra il valore t_2: si corregge t_2 per la livella calcolando $t'_2 = t_2 \pm (L_2 - L_1) J$, dove $J = \sec\varphi \operatorname{cosec} Z_2$, Z_2 essendo l'angolo azimutale, dedotto dall'azimut istrumentale, che corrisponde alla stella osservata ad W.; per la II^a serata: si calcolano le medie O_1 ed O'_2 degli istanti cronografici di 20 osservazioni delle due stelle scelte in modo (con semplice ispezione al foglio cronografico) *da corrispondere alla medesima differenza fra le altezze* che ebbe luogo per t_1 e t'_2 nella I^a serata, ed in modo ancora che abbia *un valore assoluto non superiore a circa 3^s la differenza* $(t_1 - O_1) - (t_2 - O_2)$, la qual cosa è sempre possibile essendo di circa 3^s l'intervallo fra due successive osservazioni delle serie. Si ottiene finalmente il desiderato valore nk dalla formula

$$nk = (t_1 - O_1)\, a_1 + (t'_2 - O'_2)\, a_2$$

dove i coefficienti a_1 ed a_2 (che devono avere, come il coefficiente J, approssimazione analoga a quella dei coefficienti della formula di Mayer) hanno le espressioni

$$a_1 = \frac{\operatorname{sen} Z_1}{\operatorname{sen} Z_1 + \operatorname{sen} Z_2} \quad , \quad a_2 = \frac{\operatorname{sen} Z_2}{\operatorname{sen} Z_1 + \operatorname{sen} Z_2} \quad \text{(all'incirca } a_1 = a_2 = \tfrac{1}{2}\text{)}.$$

I diversi nk ottenuti dalle diverse coppie di stelle hanno sensibilmente lo stesso peso e si può farne la media semplice.

Si corregge poi, se del caso, la media degli nk ottenuti per tener conto delle variazioni delle ascensioni rette e declinazioni delle stelle avvenute fra la I^a e la II^a serata.

Per esigenze di brevità debbo rimandare ad altra prossima pubblicazione la presentazione dei dati d'osservazione e di calcolo raccolti in più serate: i risultati delle osservazioni compiute nei giorni 17-18-19 gennaio 1909, furono i seguenti:

17-18 gennaio	. . . . .	$k = +\,0^s,589 \pm 0^s,027$
17-19 »	. . . . .	$2k = +\,1\,,080 \pm 0\,,031$
18-19 »	. . . . .	$k = +\,0\,,491 \pm 0\,,025$.

Ognuno di questi nk fu dedotto da due determinazioni del genere descritto richiedenti ciascuna circa un'ora di tempo e comprendenti l'osservazione di 14 stelle (che si possono dire *orarie*). L'error medio dell'nk dedotto da una sola coppia è risultato $= \pm 0^s,07$: questo è anche il valore dell'error medio complessivo degli istanti t od O osservati e corretti per la livella: e poichè di fronte ad esso è pressochè trascurabile l'errore d'osser-

vazione delle altezze (l'error medio d'osservazione di un doppio passaggio pel filo orizzontale è risultato per tutte e tre le serate $= \pm 0^s,10$ e quindi per la media di 10 doppî passaggi $= \pm 0^s.03$). ne consegue che ogni osservazione fu affetta da un error medio di livella (o di egual natura) di $\pm 0^s,07$ che corrisponde a $\pm 0,4$ *parti di livella* (il valore di una parte della livella adoperata era $= 0^s,128$). È lecito pensare che il già molto soddisfacente grado di precisione raggiunto possa essere superato coll'impiego di una (o due) livella più sensibile, e con una maggior pratica da parte dell'osservatore (il quale, nel girare il tamburo del micrometro deve cercare di render minimi gli sforzi che tendono ad alterare la puntata in altezza del cannocchiale).

2. Sieno S_1 ed S_2 due stelle osservate agli istanti O_1 ed O_2 dell'orologio rispettivamente ad E. e ad W. a due determinate altezze h_1 ed h_2 *qualunque* (in particolare eguali) in due azimut prossimi al I° verticale ai quali corrispondono gli angoli azimutali Z_1 e Z_2 (contati da nord, da 0° a + 180°): dall'osservazione si tragga soltanto la conoscenza della differenza (in particolare $= 0$) fra le due altezze h_1 ed h_2 o, ciò che è lo stesso, della differenza fra due qualunque altezze h' ed h'' le quali differiscano da h_1 ed h_2 di una medesima quantità C, piccola abbastanza per poter trascurare, in un prestabilito grado d'approssimazione, i termini di 2° ordine e di ordine superiore nella serie

$$ts = ts\,(h) + C\left(\frac{dts}{dh}\right)_h + \frac{C^2}{2}\left(\frac{d^2ts}{dh^2}\right)_h + \cdots,$$

dove è ts il tempo siderale locale che corrisponde ad $h + C$.

Assunte due altezze $h' = h_1 - C$ ed $h'' = h_2 - C$ le quali soddisfino alla predetta condizione, si possono calcolare i tempi siderali ts_1 e ts_2 i quali corrispondono alla latitudine φ del luogo, e rispettivamente alle altezze h', h'' e alle coordinate α_1, δ_1, α_2, δ_2 delle due stelle considerate; ed allora, detta K la correzione dell'orologio, ridotta ad un istante determinato, si possono scrivere le relazioni fondamentali

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} ts_1 + \dfrac{C}{\cos\varphi \operatorname{sen} Z_1} = O_1 + K \\ ts_2 - \dfrac{C}{\cos\varphi \operatorname{sen} Z_2} = O_2 + K \end{cases}$$

dalle quali, colla notazione già usata,

$$\text{(B)} \qquad K = (ts_1 - O_1)\,a_1 + (ts_2 - O_2)\,a_2$$

Adoperando il telescopio zenitale col procedimento descritto, il valore K è affetto dagli errori che provengono: *a*) dagli errori della latitudine introdotta nel calcolo di ts_1 e ts_2; *b*) dagli errori delle coordinate delle

stelle S_1 ed S_2; *c*) dagli errori degli angoli azimutali; *d*) dagli errori d'osservazione e delle eventuali riduzioni delle osservazioni ad una presupposta differenza fra le altezze. Supponendo di poter sempre trascurare le quantità piccole d'ordine superiore al 1°, è facile stabilire le relazioni che vi sono fra i predetti errori ed i conseguenti errori del valore K; le ometto per brevità ed ometto, per la stessa ragione, di far presenti le correzioni che devono, nel caso generale, essere introdotte per ridurre le osservazioni alla presupposta differenza fra le altezze. Mi limito ad accennare che per poter usare nel calcolo valori soltanto approssimati degli angoli azimutali è necessario e sufficiente che sia piccolo abbastanza il valore della costante C.

Quando si voglia conoscere soltanto il valore $nk = K_n - K_0$, ossia determinare soltanto la *differenza* fra due successive correzioni dell'orologio comprendenti un numero intero di giorni siderali, è opportuno osservare per K_0 e per K_n le medesime stelle e all'incirca alle medesime altezze (per quanto consentono i mezzi istrumentali). Trascurando le variazioni, per l'intervallo di n giorni, delle ascensioni rette e delle declinazioni delle stelle, delle quali si può tener conto facilmente ed esattamente con analoghe correzioni, nel calcolo di K_n e di K_0 si può, per limitati valori di n, introdurre identici valori per ts_1 e ts_2 ed anche per Z_1 e Z_2: si vede allora che il valore nk è indipendente da ts_1 e ts_2 ossia che qualunque errore di questi rimane senza effetto nella differenza $K_n - K_0$: *per* ts_1 *e* ts_2 *è dunque lecito nel caso considerato assumere due valori qualunque arbitrari, non soddisfacenti ad alcuna condizione* e sul valore nk hanno effetto soltanto gli errori considerati ai capoversi *c*) e *d*); rimane così evidente la legittimità ed opportunità di aver stabilito, nel metodo proposto: 1° di osservare ciascuna stella con uno qualunque dei tre fili orizzontali, a partire da una posizione qualunque, assumendo, senza alcun calcolo preventivo e senza conoscere le coordinate esatte delle stelle osservate, per ts_1 e ts_2 rispettivamente i valori t_1 e t_2 (corretto per la livella) della I^a serata: così è $K_0 = 0$ e $(ts_2 - O_2) - (ts_1 - O_1) = 0$; 2° di scegliere la serie di altezze della II^a serata in modo che sia $(t_2 - O_2) - (t_1 - O_1)$, in valore assoluto minore di circa 3^s (tal limite, nel caso dell'istrumento da me adoperato, porta ad una esattezza esuberante, perchè l'errore degli angoli azimutali non può esser che di pochi *primi*).

Essendo sufficiente per l'esattezza dei risultati che si mantenga eguale nelle due serate la *differenza* fra le due altezze d'osservazione si può dire, in generale, che *non occorre tener conto*, con analoghe correzioni, *di nessuna circostanza la quale colpisca in modo sistematico o le due altezze di ciascuna coppia osservate nella medesima serata o le due altezze della medesima stella osservate nelle due serate*; se ne deduce che l'unica correzione che è necessario apportare, e nella quale sta probabilmente la maggior fonte degli errori d'osservazione propriamente detti, è quella dipendente dalla livella.

Richiamando alla mente i diversi errori d'osservazione e di calcolo che intervengono nelle determinazioni di tempo coll'istrumento dei passaggi e gli effetti ch'essi producono sul valore nk, si può verificare che il metodo proposto, più semplice di quello dei passaggi al meridiano per quanto riguarda la messa in stazione dell'istrumento e l'esecuzione delle osservazioni, più semplice per quanto riguarda i calcoli da eseguire, è anche teoricamente non meno esatto, di ciò si ebbe conferma sperimentale nelle osservazioni eseguite, di cui ho dato notizia.

Meccanica celeste. — *Sul valore di una particolare legge di forza centrale.* Nota di GIOVANNI ZAPPA, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

In una Nota pubblicata nel primo numero del 26° volume dell'Astronomical Journal, F. L. Griffin vuol dimostrare che esiste una infinità (semplice) di forze oltre la Newtoniana che possono generare una data ellisse, e costruisce questa infinità; ma è facile vedere che, invece di dare una nuova soluzione al problema di Bertrand, già ben risoluto da Darboux e Halphen (vedi Comptes Rendus, vol. LXXXIV), dà una soluzione particolare di un altro problema più generale.

Dall'equazione

$$f = h^2 u^2 \left(u + \frac{d^2u}{d\vartheta^2}\right) \tag{1}$$

dove h è la costante delle aree e u è il reciproco del raggio vettore, il Griffin trova per l'ellisse facendo la sostituzione data da

$$u = \frac{1 + e\cos\vartheta}{p}$$

la

$$f = \frac{h^2 u^2}{p} \tag{2}$$

e poi con l'identità

$$u^2 = u^m u^{2-m} \tag{3}$$

sostituendovi

$$u^m = \frac{(1 + e\cos\vartheta)^m}{p^m} \tag{4}$$

esprime [1] la sua legge con

$$f = K_m u^{2-m} (1 + e\cos\vartheta)^m \tag{5}$$

[1] La sostituzione di u^{2-m}, anzichè di u^m in funzione di ϑ conduce, per l'arbitrarietà di m, alla stessa legge (5).

dove

$$K_m = \frac{h^2}{p^{m+1}} \tag{6}$$

da cui per ogni valore di m si ha una legge diversa e con ciascuna di esse si ha l'ellisse di partenza. Di più ogni legge della infinità (5) genera oltre all'ellisse suddetta un'infinità di ellissi con la stessa eccentricità e gli assi maggiori sulla medesima linea.

Basta appena notare l'identità della (5) con la legge Newtoniana sull'ellisse di partenza (veggasi ad esempio sulla naturale indeterminatezza della forma della forza Appel, *Traité de Mécanique rationelle*, t. I, pag. 375 in fondo e 376); mentre per le altre ellissi occorre spendere qualche parola.

Le infinite ellissi date da ciascuna legge del sistema (5) hanno la stessa eccentricità e gli assi maggiori sulla stessa linea, dunque sono simili e similmente poste a meno di una rotazione intorno all'asse maggiore, e, per essere altresì confocali nel centro di forza, avranno i raggi vettori corrispondenti ad uno stesso ϑ proporzionali.

In luogo di u e ϑ prendiamo come variabile u e v dove u è sempre il reciproco del raggio vettore e v è il reciproco del raggio vettore dell'ellisse di partenza corrispondente allo stesso ϑ cioè

$$v = \frac{1 + e\cos\vartheta}{p} \tag{7}$$

allora possiamo porre per tutti i punti di ciascuna delle ellissi del sistema suddetto

$$\frac{u}{v} = K\,. \tag{8}$$

D'altra parte nelle nuove variabili la legge (5) è

$$f = K_m u^{2-m} v^m$$

e per la (8)

$$f = K_m v^2 \frac{v^{m-2}}{u^{m-2}} = \frac{K_m}{K^{m-2}} v^2 = \frac{K_m}{K^m} u^2$$

vale a dire anche sulle infinite ellissi la legge (5) coincide con la Newtoniana.

D'altra parte la (5) non può ridursi in tutto il campo alla forma, che vuole il corpo centrale nel fuoco, delle due generali date da Darboux e Halphen per la legge di forza centrale dipendente dalla sola posizione del mobile, cioè alla

$$\frac{\mu u^2}{(A\cos^2\vartheta + B\,\mathrm{sen}\,2\vartheta + F\,\mathrm{sen}^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cosicchè la legge (5) è una dello smisurato numero delle leggi di forza centrale che dànno l'ellissi come curve particolari; tali leggi possono venire studiate ad esempio conservando le variabili indipendenti u, v definite sopra; allora l'equazione (1) diventa

$$(9) \qquad f = h^2 u^2 \left[u - \frac{pv - 1}{p} \frac{du}{dv} - \frac{d^2u}{dv^2} \frac{1}{p} \sqrt{e^2 - (pv-1)^2} \right]$$

dove p è il parametro dell'ellisse fondamentale ed e la sua eccentricità. Se vi poniamo $u = v$, la f diviene $\frac{h^2}{p} v^2$ come era da prevedersi, quindi tutte le espressioni analitiche di f funzioni delle coordinate del corpo mobile, riducentisi a Kv^2 per $u = v$ e soddisfacenti alle ordinarie condizioni per l'esistenza dell'integrale generale della (9), daranno forze centrali che per speciali condizioni iniziali producono l'ellisse di partenza.

La (5) è una specialissima di queste leggi, quella data da

$$(10) \qquad K_m \frac{v^m}{u^{m-2}}.$$

La (5) ammette altresì il sistema delle infinite ellissi simili e similmente poste, vale a dire deve il suo integrale generale condurre all'integrale particolare $u = lv$ dove l è una costante arbitraria e quindi rientra per questo nella categoria delle leggi che si riducono alla Newtoniana, non solo per $u = v$, ma anche per $u = lv$ cioè delle f definite dalla (9) che soddisfano la condizione

$$f_{u=lv} = l_1 v^2 .$$

Così però abbiamo accennato alle soluzioni particolari e non alle singolari, ma non importa insistervi; a noi basta aver mostrato il significato che va dato alla legge (5) e alle conclusioni del Griffin (1).

Il sistema delle ellissi della (5) è uno specialissimo sistema delle ellissi che possono venir date dalla legge Newtoniana, quelle definite dalle condizioni seguenti, supposte nulle le perturbazioni,

$$\frac{h_1^2 h_2}{(M_1 + M_2)^2} = \text{cost.} \qquad \alpha = \text{cost.} \qquad \frac{h_1^2}{M_1 + M_2} = s$$

(1) « It is commonly, though erroneously, stated that, if a planet describe an ellipse as a central orbit with the sun at a focus, the law must be that of Newton ecc. ». Il Griffin estende anche il modo di formazioni di nuove leggi a una orbita qualunque descritta come orbita centrale. Ora sulla curva data le leggi così ottenute si equivalgono, mentre fuori della curva descritta dal mobile nessuna cognizione abbiamo della forza che vi domina. Solo in conseguenza di determinate ipotesi, della definizione del campo, potremo ammettere una legge determinata in questo campo, fuori della curva realmente descritta dal mobile.

dove h_1 è la costante delle aree, h_2 quella della forza viva e α quella data dall'integrazione di

$$d\vartheta = \frac{du}{\sqrt{A^2 - u^2}},$$

M_1 è la massa del corpo centrale, M_2 quella del mobile e s può assumere qualunque valore reale positivo. Così si ha la rappresentazione geometrica del sistema della (5), ma non si riproduce la legge del tempo, giacchè se riduciamo la (5) all'espressione Newtoniana Ku^2, troviamo che il K per la forma dei coefficienti della (5) e precisamente per il parametro elevato a $-(m+1)$, varia da ellisse a ellisse: Riprendiamo la (5) e otteniamo, se passiamo dall'ellisse di parametro p, e costante delle aree h, e raggio vettore v a un'altra di raggio vettore u con $u = lv$

$$f = \frac{h^2}{p^{m+1}} \frac{p^m v^m}{u^{m-2}} = \frac{h^2}{p} \frac{u^2}{l^m}.$$

Ora $\frac{h^2}{p}$ è costante su tutte le ellissi e corrisponde al fattore di $\frac{1}{r^2}$ nella forma Newtoniana della legge sulla prima di esse; mentre l^m varia da ellisse a ellisse.

Ne segue che il moto sul sistema delle ellissi della (5), che non contiene le masse, non soddisfa alla terza legge di Keplero, neppure supposte le masse dei mobili sempre uguali.

In realtà sull'ellisse di raggio vettore v e semiasse maggiore a è

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}}{h} \tag{12}$$

mentre su un'altra ellisse definita da $u = lv$ è

$$T_l = \frac{2\pi A^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}}{h} \sqrt{l^m}. \tag{13}$$

Per serbare inviolata la terza legge di Keplero basterebbe porre nella forma (8) K uguale a una costante moltiplicata per la somma delle masse cioè nella forma (5)

$$K_m = \frac{h^2}{p P^m} (M + M_l)$$

dove p è il parametro dell'ellisse di partenza e P di quella che si considera,

mentre per avere il movimento della (5) sull'ellisse con la legge Newtoniana, occorre introdurre anche un'ipotesi sulla massa, porre cioè

$$\frac{M}{M_l} = l^m$$

in cui m è l' m della (5), M e M_l sono rispettivamente la somma delle masse del corpo centrale con il mobile sull'ellisse fondamentale, o con il mobile sull'ellisse legata a quella della relazione

$$u = l v .$$

Di conseguenza le costanti delle aree e quelle delle forze vive vengono ad essere legate dalle relazioni

$$\frac{h_1}{h_{1l}} = \sqrt{l^{m+1}} \qquad \frac{h_2}{h_{2l}} = l^{m-1} .$$

Dalla (12) e dalla (13) si ha che la (5), quando m sia positivo, produce una diminuzione della durata di rivoluzione rispetto a quella data dalla legge di Keplero, quando sieno le masse dei mobili uguali, tanto più grande, quanto maggiore è la distanza del mobile dal centro di forza, mentre quando m sia negativo produce un aumento parimenti tanto più grande, quanto maggiore è la distanza del mobile dal centro di forza.

Di qualche interesse è una particolare delle (5), quella data da

$$m = 3$$

cioè la

$$f = \frac{h^2}{p^4} \frac{(1 + e \cos \vartheta)^3}{u} . \tag{14}$$

Per essa sulle ellissi si ha

$$T = T_l$$

cioè la durata di rivoluzione è indipendente dalla distanza media del mobile dal centro di forza: Di più

$$\frac{h}{h_l} = l^2$$

e si ha il teorema: Due corpi mossi dalla (14) uno sull'ellisse v e uno sulla $u = lv$ (a parte sempre le azioni mutue) o sono perennemente in congiunzione (in anomalia vera) rispetto al centro di forza o non possono esser mai in tale posizione.

Di fatti se definiamo la posizione dei mobili sulle rispettive ellissi con l'area S_0, S_l che ha descritto il raggio vettore a partire, ad esempio, dal perielio, allora se per $t = t_0$ $S = S_0$ per uno e $S = S_{0l}$ per l'altro, per un t qualunque sarà

(15) $$S = S_0 + h(t - t_0)$$

per l'uno e

(16) $$S_l = S_{0l} + h_l (t - t_0)$$

per l'altro.

Ora se per un tempo t le anomalie vere dei due corpi ϑ e ϑ_l sono uguali deve per lo stesso istante in causa della similitudine delle ellissi essere

$$S = l^2 S_l$$

e poichè

$$h = h_l l^2$$

se non è

$$S_0 = l^2 S_{0l}$$

cioè se non è

$$\vartheta_0 = \vartheta_{0l}$$

non potrà per nessun t essere

$$S = l^2 S_l ;$$

mentre se è

$$S_0 = l^2 S_{0l}$$

per qualunque t sarà

$$S = l^2 S_l$$

cioè

$$\vartheta = \vartheta_l .$$

Dalle (15) e (16) segue ancora che l'area $\bar{S}$ del settore di una delle due ellissi racchiuso dai raggi vettori corrispondenti alle due anomalie vere dei due mobili è costante, cosicchè la variazione dell'angolo $\bar{\vartheta}$ racchiuso fra questi due vettori dato da

$$\vartheta = \frac{\bar{S}}{\bar{r}^2}$$

in cui $\bar{r}$ è un valore intermedio del raggio vettore, è dell'ordine dell'eccentricità e quindi, per eccentricità ed inclinazione dei due piani piccole, se i due mobili sono stati una volta in opposizione rispetto al centro di forza restano perennemente prossimi a quella posizione; e quando nel punto centrale di forza vi fosse un corpo di una certa luce o occultante da uno dei due mobili una certa area, essi potrebbero restar così perennemente invisibilli l'uno all'altro.

Storia della scienza. — *Études sur Léonard de Vinci; ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu.* Lettera del prof. P. Duhem al Presidente.

Monsieur le Président,

Il y a trois ans, l'Accademia dei Lincei a bien voulu accueillir avec une extrême bienveillance, la première série de mes *Études sur Léonard de Vinci, ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu.* Cet accueil m'encourage à vous envoyer aujourd'hui la seconde série de ces mêmes *Études*, en vous demandant d'en faire hommage, en mon nom, à l'Académie.

Cette nouvelle série renferme quatre pièces, dont deux ont déjà été publiées par le *Bulletin Italien*, tandis que les deux autres sont inédites.

L'étude intitulée *Nicolas de Cues et Léonard de Vinci* a pour objet d'établir, au moyen de très nombreux rapprochements, que Léonard avait lu et médité la plûpart des écrits du Cardinal Nicolas de Cues; bon nombre des notes philosophiques que l'on rencontre éparses dans le cahiers du grand peintre semblent avoir été suggérées par cette lecture; la vraisemblance d'une pareille supposition se transforme en quasi-certitude pour plusieurs remarques de Mécanique; en particulier, le curieux *jeu du globe*, qui avait fourni le prétexte et le titre d'un dialogue composé par Nicolas de Cues, conduit Léonard à la notion d'*impeto* composé, qu'il applique au changement de direction dans le vol des oiseaux et à divers autres problèmes de Dynamique.

L'étude qui a pour titre: *Léonard de Vinci et les origines de la Géologie*, montre que toutes les réflexions du Vinci touchant la formation des fossiles et la stratigraphie, ont un but unique: corroborer une théorie des petits mouvements du sol qu'Albert de Saxe avait enseignée, à l'Université de Paris, au milieu du XIV^{e} siècle. Cette théorie n'avait jamais perdu la faveur ni de l'Université de Paris, ni des Universités allemandes, colonies de celle-ci; elle était, en revanche, presque universellement rejetée ou méconnue par les Universités du Nord de l'Italie. En cette circonstance, comme en beaucoup d'autres, Léonard prit parti pour l'opinion parisienne; il contribua de la sorte à assurer le triomphe des *doctrines de Paris* sur les doctrines averroïstes de Bologne et de Padoue; ce triomphe exerça, me semble-t-il, une heureuse et puissante influence sur la renaissance scientifique dont l'Italie fut le siège au XVI^{e} siècle; l'étude de cette influence contribuerait à éclairer d'un nouveau jour les relations intellectuelles si intimes de nos deux patries. Les deux pièces intitulées: *Léonard de Vinci*

et les deux infinis, Léonard de Vinci et la pluralité des mondes nous montrent encore le grand peintre adoptant, en deux problèmes essentiels de la Philosophie naturelle, des solutions que favorisait la Scolastique parisienne de son temps. Ces deux problèmes, intimement liés l'un à l'autre, avaient, depuis longtemps, mis aux prises la Scolastique de Paris et la Philosophie d'Aristote et d'Averroès.

Cette Philosophie avait formulé les propositions suivantes: L'univers est formé d'une certaine matière première finie. Aucun acte destructeur ne peut anéantir aucune partie de cette matière; aucune acte créateur n'y peut rien ajouter. L'Univers est formé de toute la matière première possible, en sorte que parler de l'existence d'un autre univers serait énoncer une absurdité. Aucune grandeur ne peut être infinie, ni en acte, ni en puissance. Le volume de l'Univers est la limite supérieure de tout volume possible; le diamètre de l'Univers, la limite supérieure de la longueur de toute ligne droite possible.

En 1277, sur l'invitation du pape Jean XXI et sous la présidence d'Étienne Tempier, évêque de Paris, les théologiens de la Sorbonne se réunirent pour condamner, en la Philosophie d'Aristote et d'Averroès, toutes les affirmations qui leur semblaient contraires à l'orthodoxie catholique; parmi les articles réprouvés se trouvait celui-ci: « Quod Deus non posset plures mundos facere ».

Cette décision engageait les philosophes scolastiques à reprendre, sur nouveaux frais, les deux problèmes de l'infiniment grand et de la pluralité des mondes; cet engagement ne fut pas sans effet, car ces deux problèmes furent, dès lors, l'objet de débats d'une extrême importance.

Nous nous sommes efforcé de retracer l'histoire de ces débats depuis l'année 1277 jusqu'au temps de Léonard de Vinci.

Au sujet de la grandeur infinie, deux partis se forment à Paris.

Le premier de ces partis a pour chef le franciscain Richard de Middleton, qui écrivait à la fin du XIII^{e} siècle; il compte, dans ses rangs, Guillaum d'Occam, Jean Buridan et Albert de Saxe. Ce parti admet seulement l'*infini syncatégorique*; seule, une grandeur finie peut avoir une existence actuelle; mais une grandeur finie quelconque étant donnée, il peut toujours en exister une plus grande.

En face de cette école se dressent les partisans de l'*infini catégorique*; le premier de ceux-ci est un autre franciscain, Jean de Bassols, disciple immédiat de Duns Scot; après lui, nous trouvons, dans ce camp, Grégoire de Rimini et Robert Holkot. La rigueur logique avec laquelle Grégoire de Rimini cherche à définir les mots *plus grand, plus petit, tout, partie*, appliqués à des quantités qui sont catégoriquement infinies, a une parenté marquée avec la précision que, de nos jours, M. Georges Cantor a su introduire en la théorie des ensembles transfinis.

Touchant la pluralité des mondes, on peut, parmi les Parisiens, discerner les tenants de trois opinions.

Henri de Gand, qui fut sans doute un des juges de 1277, Richard de Middleton vers 1280; puis, au XIV^e^ siècle, Walter Burley et Guillaume d'Occam, croient à la possibilité d'univers multiples, mais en nombre fini; telle est aussi la pensée de Gaëtan de Tiène qui, au XV^e^ siècle, représente à Padoue l'École parisienne.

Jean de Bassols et Robert Holkot vont plus loin et ne voient rien qui s'oppose à la possibilité d'une multitude infinie de mondes.

Enfin, Jean Buridan et Albert de Saxe reviennent à l'opinion péripatéticienne: Il ne peut exister qu'un monde unique.

Au début du XVI^e^ siècle, l'École théologique qui semble avoir, à Paris, le plus d'influence, est celle de l'Ecossais Johannes Majoris. Or, au sujet des deux problèmes dont nous parlons, Johannes Majoris tient pour les deux solutions les plus anti-péripatéticiennes: la possibilité de l'infini catégorique et d'une moltitude infinie de mondes.

Léonard semble avoir été plus timide; il paraît avoir admis seulement la possibilité de l'infini syncatégorique et de mondes multiples, mais en nombre fini.

En recherchant les influences aux quelles ont été soumises les pensées du grand peintre, nous nous sommes trouvés conduits à retracer, en diverses circonstances, les premières démarches de la Science moderne. Nous serions heureux que nos efforts pour y parvenir ne parussent pas trop indignes du bienveillant intérêt de l'Accademia dei Lincei.

Croyez, Monsieur le Président, à mes sentiments très respectueux.

P. Duhem.

Correspondant de l'Institut de France,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Bordeaux, 7 mars 1909.

Fisica. — *L'azione termica e l'azione ionizzante del torio contenuto nelle rocce.* Nota di G. A. Blanc, presentata dal Socio V. Volterra.

Ho avuto campo in due miei precedenti lavori, di mostrare come il torio, che fino ad ora non era stato preso in considerazione da coloro i quali si sono occupati della radioattività della crosta terrestre, debbasi invece, sotto questo aspetto, considerare come un agente d'importanza forse anche superiore a quella del radio.

Ricorderò che le determinazioni della quantità di torio esistente nel terreno del giardino di Panisperna, in Roma (1), hanno mostrato esservi contenuti *almeno* gr. $1{,}45 \times 10^{-5}$ di torio per grammo, dovendosi tale cifra considerare come un minimo, mentre ricerche condotte con un metodo del tutto diverso, ed assai più preciso (2), mi hanno permesso di constatare la presenza, in quattro su cinque campioni di rocce granitiche da me esaminati, di quantità di torio varianti tra $2{,}07 \times 10^{-5}$ e $8{,}28 \times 10^{-5}$ gr. per grammo di roccia.

Ora è interessante di vedere quali possano essere, dal punto di vista della radioattività terrestre, le azioni che devono esercitare quantità di torio di tale ordine diffuse in seno alle rocce ed al suolo, paragonandole alle azioni dello stesso genere esercitate dal radio, che le esperienze di Strutt e di altri hanno mostrato esservi contenuto.

Le azioni che verranno qui prese in considerazione sono di due specie, e cioè azione termica, prodotta principalmente dalla trasformazione di energia cinetica che accompagna l'assorbimento dei corpuscoli α in seno alle rocce ed al terreno, ed azione di ionizzazione dell'aria atmosferica per parte delle radiazioni direttamente emesse dai varî prodotti contenuti nel suolo stesso.

Azione termica. — Una determinazione assai accurata della quantità di calore prodotta da una determinata massa di ossido di torio è stata recentemente fatta da Pegram e Webb (3), i quali hanno dimostrato che un grammo di cotesto composto di torio, in cui si possa considerare raggiunto lo stato di equilibrio radioattivo con tutti i successivi prodotti di trasformazione, compreso il radiotorio, produce $2{,}1 \times 10^{-5}$ piccole calorie all'ora. Ora 1 gr. di ossido di torio ($Th\,O_2$) contiene gr. 0,879 di torio, per cui si deduce che 1 gr. di torio in equilibrio radioattivo produce $2{,}38 \times 10^{-5}$ piccole calorie all'ora. Se si ammette, come sembra verosimile, che il procedimento chimico da me seguìto nell'esame dei campioni di rocce sia stato

(1) Rendiconti Acc. dei Lincei. XVII, pag. 101, 1° sem. 1908.
(2) Rendiconti Acc. dei Lincei. XVIII, pag. 241, 1° sem. 1909.
(3) Le Radium, V, pag. 271, 1908.

tale da separare cogli idrati, insieme al torio, la totalità del radiotorio esistente in essi, sarà facile ricavare la quantità di calore prodotta nell'unità di tempo in ogni grammo di ciascuna roccia, dalla disintegrazione del torio e dei suoi successivi prodotti.

I risultati, ai quali è stato aggiunto quello che si è ottenuto pel terreno di Panisperna, esaminato con metodo diverso, sono riportati nella seguente tabella.

Natura del materiale	Provenienza	Quant. di Th in gr. per gr.	Quantità di calore generato all'ora in un gr. del materiale dal torio e dai suoi prodotti.
Sienite	La Balma (Biella)	$8{,}28 \times 10^{-5}$	$19{,}70 \times 10^{-10}$ picc. cal.
Sienite	Bagni (Biella)	$6{,}30 \times 10^{-5}$	$15{,}00 \times 10^{-10}$ » »
Granito	Baveno (Lago Magg.)	$3{,}14 \times 10^{-5}$	$7{,}47 \times 10^{-10}$ » »
Granito	Vosgi (Francia)	$2{,}07 \times 10^{-5}$	$4{,}93 \times 10^{-10}$ » »
Terra vegetale	Panisperna (Roma)	$1{,}45 \times 10^{-5}$	$3{,}45 \times 10^{-10}$ » »

Dalle cifre dell'ultima colonna si vede che la media delle quantità di calore prodotte dai componenti la serie del torio nei materiali da me esaminati è di $1{,}01 \times 10^{-9}$ picc. cal. all'ora per grammo.

Ora la quantità media di radio trovata da Strutt nel grande numero di rocce ignee da esso esaminate è di circa $3{,}35 \times 10^{-12}$ gr. per gr. D'altra parte dalle esperienze di Rutherford risulta che 1 gr. di bromuro di radio in equilibrio radioattivo coi suoi successivi prodotti, fino al radio C, produce 65 picc. cal. all'ora; siccome 1 gr. di bromuro di radio ($Ra\,Br_2$) contiene gr. 0,586 di radio, se ne deduce che 1 gr. di radio, in equilibrio radioattivo coi suoi prodotti successivi fino al radio C, produce 110 picc. cal. all'ora.

Ma nelle roccie il radio deve considerarsi in istato di equilibrio radioattivo con tutti i membri della sua famiglia, tanto antecedenti quanto susseguenti ad esso, dall'uranio al radio F (polonio); occorrerà dunque, se si vuol stabilire la quantità di calore prodotta in seno alle rocce da tutta la serie uranio-radio-radio F, vedere anzitutto quale debba essere la correzione da farsi alla cifra suindicata del Rutherford, la quale, come ho detto, si riferisce alla quantità di calore generata dal radio in equilibrio coi soli prodotti successivi fino al radio C.

Ora siccome la produzione di calore per parte dei corpi radioattivi è dovuta alla trasformazione di energia che accompagna l'assorbimento della radiazione α, è evidente che volendo considerare la totalità del calore prodotto da tutti i membri della famiglia uranio-radio-radio F, bisognerà aggiungere alla cifra indicata da Rutherford le calorie generate dall'uranio, dalloionio e dal radio F, che sono precisamente i tre membri della suddetta famiglia emettenti raggi α i quali non intervenivano nelle esperienze di Rutherford.

Ricordando che nello stato di equilibrio radioattivo le masse di ciascun prodotto presente sono inversamente proporzionali al numero di atomi di quel

prodotto che per unità di massa si disintegrano nell'unità di tempo, si vede che il numero complessivo di corpuscoli α emessi nell'unità di tempo deve essere proporzionale al numero di prodotti presenti (la cui disintegrazione, beninteso, sia accompagnata dall'emissione di simili corpuscoli). In altre parole, per ogni corpuscolo α emesso da un prodotto ve ne sarà uno emesso da ciascuno degli altri prodotti. Ora i prodotti emettenti corpuscoli α, dal radio al radio C sono 4, per ognuno dei corpuscoli α emessi dai quali bisognerà aggiungerne altri 3 emessi rispettivamente dall'uranio, dallo ionio e dal radio F.

Senonchè la velocità con cui sono lanciati cotesti corpuscoli, pur essendo sempre la stessa per un medesimo prodotto, varia col variare di questo; benchè non sia stato ancora definito sperimentalmente il modo con cui varia la produzione di calore col variare della velocità del corpuscolo α, potremo ammettere che, almeno entro i limiti abbastanza ristretti che a noi interessano per la soluzione del nostro problema, la quantità di calore prodotta nell'arresto del corpuscolo α sia proporzionale all'energia cinetica da esso posseduta inizialmente allorquando venne lanciato fuori dall'atomo. In tal caso è facile vedere che, date le velocità iniziali dei corpuscoli α emessi dal radio, dall'emanazione, dal radio A e dal radio C, da una parte, e dall'uranio, dallo ionio e dal radio F dall'altra, la cifra suindicata del Rutherford deve venir moltiplicata per 1,5 allo scopo di ottenere la quantità approssimativa di calore prodotta da 1 gr. di radio in equilibrio radioattivo con tutti i membri della sua famiglia dall'uranio al radio F. Tale quantità risulta quindi pari a 165 picc. cal. all'ora.

Ne viene di conseguenza che la quantità media di calore prodotta nelle rocce esaminate da Strutt dai membri della famiglia uranio-radio-radio F è di circa $5{,}54 \times 10^{-10}$ picc. cal. all'ora e per grammo di roccia.

Da ciò si conclude che la quantità media di calore prodotta dalla famiglia del torio nei materiali esaminati da me è all'incirca doppia della quantità media di calore prodotta dalla famiglia uranio-radio-radio F nelle rocce ignee esaminate da Strutt.

Azione ionizzante. — Passiamo ora ad esaminare un altra azione assai importante esercitata dai corpi radioattivi diffusi nella crosta terrestre, e cioè l'azione ionizzante che esercitano le loro radiazioni in seno all'aria atmosferica. E qui occorre fare anzitutto una distinzione tra gli effetti dovuti ai varî tipi di raggi.

Incominciando dai raggi α è chiaro che, benchè il loro potere ionizzante sia incomparabilmente superiore a quello dei raggi β e γ, la loro azione come causa generatrice di ioni atmosferici, finchè si tratta di radiazioni provenienti da sostanze contenute nel suolo, si deve considerare come assai piccola. È sufficiente per convincersene ricordare che basta qualche millesimo di millimetro di un solido qualsiasi, o alcuni centimetri di aria,

per assorbire completamente questa categoria di raggi. Potranno dunque soltanto intervenire come generatori di ioni atmosferici i corpuscoli α provenienti da un sottilissimo strato superficiale del suolo, qualunque sia la natura di questo, ed inoltre la loro azione ionizzante si esplicherà soltanto entro una zona d'aria di alcuni centimetri di spessore (e precisamente dello spessore di 8,6 cm., distanza questa che rappresenta il massimo percorso ionizzante che può fare il corpuscolo α dotato di maggior velocità iniziale, e cioè quello del torio C, e questo quando l'atomo che si disintegra non sia separato dall'aria da uno strato di materiale assorbente).

Ma d'altra parte, per ciò che si è detto poc'anzi intorno alla quantità di calore generato in seno alle rocce, ricordando la proporzionalità trovata da Rutherford tra il potere calorifico e la radiazione α, si desume che la intensità media della radiazione α, prodotta dalla serie del torio nei materiali da me esaminati, dev'essere all'incirca doppia di quella della radiazione α prodotta dalla serie uranio-radio-radio F nelle rocce ignee trattate da Strutt, per cui si può dire che il numero di ioni prodotti dai raggi α della serie del torio nelle vicinanze immediate dei materiali esaminati da me deve essere anch'esso all'incirca doppio del numero di ioni prodotti dalla radiazione α della serie del radio nelle vicinanze immediate dei materiali esaminati da Strutt.

Per ciò che riguarda i raggi β, occorrerebbe anzitutto conoscere il rapporto esistente tra le attività specifiche della serie uranio-radio-radio F e della serie del torio, misurate per questi raggi. Ad ogni modo si può ritenere che, benchè più penetranti dei raggi α, dato il loro debole potere ionizzante, non debbano avere una parte notevole nella produzione degli ioni atmosferici.

Rimane peraltro da prendere in esame le radiazioni γ, visto che è da ritenersi che una notevole parte della radiazione penetrante dell'atmosfera provenga precisamente dai materiali radioattivi occlusi nel suolo; ed anzitutto cerchiamo di vedere quale sia il valore del rapporto esistente fra le attività specifiche misurate in raggi γ, corrispondenti rispettivamente alle serie uranio-radio-radio F e del torio, ambedue in istato di equilibrio radioattivo. Ora tale rapporto noi lo possiamo dedurre dai risultati di una ricerca di Eve [1]: accurate esperienze eseguite da questo fisico mostrano infatti che, a parità di massa, la radiazione γ emessa dal bromuro di radio, in equilibrio radioattivo coi suoi successivi prodotti fino al radio C, è $4{,}5 \times 10^6$ volte più intensa della radiazione γ emessa dal torio in equilibrio radioattivo con tutti i suoi successivi prodotti di trasformazione, compreso il radiotorio.

Rimane peraltro da vedere se cotesta cifra debba venir corretta pel fatto che nelle esperienze di Eve non entravano in giuoco i prodotti della famiglia uranio-radio-radio F antecedenti al radio e susseguenti al radio C.

[1] Amer. Journ. of Sc., dicembre 1906; Le Radium, IV, pag. 124, 1907.

Ora se si esaminano tutti i prodotti di questa famiglia si vede che i due soli che generano raggi γ sono l'uranio X ed il radio C; senonchè la radiazione γ dell'uranio X ha un potere penetrante così debole, rispetto a quella del radio C, da poter essere trascurata.

Potremo dunque servirci del valore trovato da Eve pel rapporto tra le attività specifiche misurate in raggi γ delle due serie di prodotti.

Ricordando che la quantità media di torio esistente nei miei materiali è di $4{,}25 \times 10^{-5}$ gr. per gr. e che la quantità media di radio esistente nelle rocce ignee esaminate da Strutt è di $3{,}35 \times 10^{-12}$ gr. per gr. si ricava subito che l'intensità della radiazione γ emessa dal torio contenuto nei miei materiali è 5,7 volte maggiore dell'intensità della radiazione γ emessa dal radio contenuto nelle roccie ignee di Strutt.

Mi sembra interessante prima di terminare, di richiamare l'attenzione su di alcune osservazioni fatte da Eve, la cui interpretazione può venir chiarita mediante la considerazione dei risultati da me ottenuti.

In un primo lavoro Eve (1) ha cercato di dedurre la quantità di radio contenuta nel cm^3 del suolo a Montreal dalla intensità della radiazione penetrante emessa dal suolo stesso, ed ha trovato per risultato gr. $1{,}8 \times 10^{-11}$ per cm^3; in un ulteriore lavoro fatto in collaborazione col Mac Intosh (2), lo stesso autore descrive delle esperienze eseguite seguendo il procedimento chimico adoperato da Strutt, e dalle quali risulta che la proporzione media di radio contenuta nelle rocce provenienti dalla regione di Montreal è di gr. $1{,}1 \times 10^{-12}$ per grammo, il che, assumendo per la densità media delle rocce stesse il valore 2,6, equivale ad una proporzione di gr. $2{,}9 \times 10^{-12}$ per cm^3, valore questo circa 6 volte minore di quello trovato dallo stesso Eve col precedente metodo.

Ora è chiaro che mentre col secondo metodo, basato sulla misura della quantità di emanazione di radio prodotta in seno ad una soluzione della roccia, si ottiene una misura della quantità di radio in essa contenuta, col primo metodo invece, basato sulla determinazione dell'intensità della radiazione penetrante che viene emessa dal suolo o da un campione di roccia, si vengono ad osservare gli effetti prodotti dall'insieme di sostanze radioattive emettenti raggi γ, le quali, oltre al radio C, possono essere presenti, ed in particolare del torio C.

La discrepanza esistente tra i risultati ottenuti da Eve adoperando i due metodi sopra indicati va, secondo me, probabilmente attribuita alla presenza di torio nel suolo di Montreal.

Come ho già detto, i risultati da me ora comunicati vanno considerati come i primi di una serie di analisi radioattive di un certo numero di rocce

(1) Phil. Mag., settembre 1906.
(2) Phil. Mag., agosto 1907.

di diversa natura e provenienza; le minute precauzioni che sono indispensabili in ricerche di questo genere per evitare ogni possibile causa d'errore, e che sono state descritte nella mia precedente Nota, fanno sì che il lavoro proceda con una certa lentezza. Ho voluto tuttavia sin da ora comunicare alcune delle conseguenze che da questi miei primi risultati si possono dedurre.

Fisica. — *Sulla variazione di tenacità del ferro nel campo magnetico* (1). Nota riassuntiva del prof. ERNESTO DRAGO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

1. In questa seconda Nota sono esposti i risultati delle esperienze eseguite con i varî campioni di filo di ferro.

I fili X con cui dapprima s'intrapresero le ricerche quantitative, presentavano un diametro di $0^{mm}.4$ ed un colore bruno caratteristico, dal quale si poteva arguire che non erano stati ricotti in un'atmosfera inerte.

Con essi si fecero tre serie di misure nel modo seguente. Si sceglievano molti pezzi di filo della stessa lunghezza da una medesima matassa e si tagliavano in due parti eguali, di cui una era sottoposta a rottura senza eccitare il campo magnetico, l'altra dopo avere eccitato il medesimo. In ogni misura si prendeva nota della temperatura segnata da un termometro il cui bulbo era collocato a piccolissima distanza dalla parte di filo cementata.

I risultati di una prima serie di esperienze sono consegnati nella seguente

TABELLA I.

Numero d'ordine	P_s	t	P_m	t'	P_c	T_s	T_m	l_{sm}	l'_{sm}	l_{cm}	l'_{cm}
ATTACCHI MECCANICI						CAMPO MAGNETICO 300 gauss					
	gr.	°	gr.	°	gr.	m s	m s	mm	mm	mm	mm
1	5756	11, 0	5763	10, 5	5760	16 0	16 0	62	81	60	76
2	5725	11, 8	5728	12, 0	5729	16 0	16 0	58	76	59	77, 5
3	5734	12, 6	5744	12, 0 (2)	5740	16 3	16 2	60	78	61	78
4	5724	11, 7	5728	12, 0	5730	15 48	15 49	57, 5	75	60	78
5	5718	11, 9	5722	11, 9	5722	16 20	16 10	60	79	60	79
6	5705	13, 7	5711	13, 9	5712	16 2	16 5	61	81	60	78
7	5708	12, 0	5717	11, 5	5714	15 3	15 0	60	77	60	81
8	5701	12, 5	5702	12, 8	5704	15 7	15 0	60	83	60	77
Medie	5721,4		5726,9		5726,4	15 48	15 46	59, 8	78, 8	60, 0	78, 1

$$\frac{\overset{gr.}{5726,4 - 5721,4}}{\Delta = 5,0} \qquad \frac{1000\,\Delta}{M} = 0,9.$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Catania.

(2) Si ebbe $t' < t$ rompendo il filo prima nel campo magnetico.

Le lettere indicano ordinatamente:

P_s carico di rottura dei fili non magnetizzati.

t temperatura dei medesimi.

P_m carico di rottura dei fili magnetizzati.

t' temperatura dei medesimi.

P_c valore di P_m corretto per la variazione di temperatura $t'-t$.

T_s tempo necessario per la rottura dei fili non magnetizzati.

T_m idem dei fili magnetizzati.

l_{sm} lunghezza iniziale dei fili non magnetizzati.

l'_{sm} somma delle lunghezze dei due pezzi ottenuti dopo la rottura dei precedenti.

l_{cm} lunghezza iniziale dei fili magnetizzati.

l'_{cm} somma delle lunghezze dei due pezzi ottenuti dopo la rottura dei precedenti.

Δ differenza tra i valori medî di P_c e P_s.

M valore medio di P_s.

$\frac{1000\,\Delta}{M}$ aumento medio del carico di rottura per mille.

Dalle altre due serie di esperienze si ebbero rispettivamente i valori:

gr.		gr.	
5540,9	$\frac{1000\,\Delta}{M} = 0,85$	5693,1	$\frac{1000\,\Delta}{M} = 1,0$.
5536,2		5687,2	
$\Delta = 4,7$		$\Delta = 5,9$	

I fili A avevano il diametro di $0^{mm},3$ ed un colore bianco grigiastro. Le esperienze istituite in proposito fornirono i valori:

gr.		gr.	
3354,0	$\frac{1000\,\Delta}{M} = 1,0$	3410,8	$\frac{1000\,\Delta}{M} = 0,9$.
3350,5		3407,8	
$\Delta = 3,5$		$\Delta = 3,0$	

2. Nelle rimanenti tabelle sono stati trascritti i risultati delle esperienze eseguite con i fili R. Questi avevano lo stesso diametro medio e lo stesso colore dei fili A, e ciascuno era tagliato in tre parti eguali di cui una era sottoposta a rottura senza eccitare il campo magnetico, un'altra dopo avere eccitato il medesimo, e la rimanente nelle condizioni della prima. Ovvero dapprima si rompeva una parte del filo nel campo magnetico, poi un'altra senza eccitare il medesimo, e la terza nelle condizioni della prima. In tal modo poterono formarsi rispettivamente i gruppi di misure [A], [B], [C] o [A'], [B'], [C'].

Le parti di filo rotte nel campo magnetico non erano le stesse in ogni esperienza: talora cioè si sottoponeva a rottura la parte centrale, tal'altra una delle parti terminali del filo e ciò per evitare un errore sistematico nelle misure, dipendente da costante differenza di tenacità dei fili nella loro lunghezza.

Gli attacchi di tali parti agli uncini venivano fatti ordinariamente con saldatura a stagno e le esperienze erano eseguite in un campo magnetico di 40 gauss ottenuto mediante il solenoide, ed in campi di 500, 900 e 1400 gauss con l'elettromagnete di Faraday. Non credetti opportuno eseguire ricerche con campi più elevati perchè in tal caso la temperatura dell'ambiente in cui avveniva la rottura aumentava molto e rapidamente e qualsiasi correzione sarebbe stata forse illusoria. Difatti prove in proposito non mi condussero a risultati sicuri e concordanti.

Nelle tabelle seguenti le lettere hanno questo significato:

P carico di rottura.

t temperatura dell'ambiente in cui avveniva la rottura.

P′ carico di rottura corretto per le variazioni di temperatura.

T tempo necessario per la rottura.

l_i lunghezza iniziale della parte di filo sottoposta ad esperimento.

l_f somma delle lunghezze dei due pezzi ottenuti dopo la rottura della precedente.

Δ differenza tra i valori medî delle misure eseguite rispettivamente con il campo e senza campo magnetico.

M medio dei valori P e P′ ottenuti senza campo magnetico.

$\frac{1000\,\Delta}{M}$ aumento medio del carico di rottura per mille causato dalla magnetizzazione.

V valore medio di P per i gruppi di misure [A] o [A′].

V′ valore analogo per i gruppi di misure [C] o [C′].

V'_c valore medio di P′ per i gruppi di misure [C] o [C′].

TABELLA II [1].

Numero d'ordine	P	t [2]	T	l_i	l_f	Numero d'ordine	P	t [2]	T	l_i	l_f
[A]	SENZA CAMPO					[A']	CAMPO MAGNETICO 40 gauss				
	gr.	°	m s	mm	mm		gr.	°	m s	mm	mm
64	2500	13, 6	9 0	60	79	124	2476	14, 0	8 47	61	80
66	2518	12, 5	9 54	60	76	126	2483	13, 2	10 15	60	79
68	2415	15, 0	10 54	61	80	128	2505	15, 4	9 7	60	78
70	2513	14, 2	10 35	60	78	130	2501	15, 7	9 7	61	79
72	2505,5	13, 5	9 27	59	75	132	2441	15, 2	8 55	62	81
74	2452	14, 0	9 30	60	78	134	2497	14, 5	10 0	60	77
76	2459	13, 6	10 22	60	78	136	2500,5	15, 0	9 47	61	80
78	2493	13, 4	8 55	61	80	138	2463	13, 9	9 50	61	79
80	2434	15, 6	9 48	61	81	140	2462	14, 7	9 65	60	77
82	2445	14, 4	9 49	62	79	142	2447	13, 4	9 33	60	77
[C]						[C']					
104	2498	13, 6	9 1	60	80	164	2474	14, 1	8 47	60	80
106	2519	12, 6	10 0	59	76	166	2486	13, 3	9 57	61	80
108	2416,5	15, 0	10 52	61	80	168	2507	15, 3	9 5	60	78
110	2512 5	14, 3	10 36	61	79	170	2503	15, 8	9 7	61	79
112	2508	13, 6	9 35	60	79	172	2435	15, 2	8 58	62	79
114	2450	14, 0	9 38	60	78	174	2498,5	14, 6	9 55	60	78
116	2459	13, 6	10 33	61	79	176	2498	15, 0	9 47	61	79
118	2495	13, 5	8 53	60	78	178	2469	13, 9	9 46	61	79
120	2436	15, 6	9 45	62	80	180	2465	14, 7	9 55	61	78
122	2446	14, 5	9 46	61	79	182	2447	13, 4	9 26	60	78
Medie	M = 2473,7		9 51	60,45	78,6	Medie	2477,9		9 30	60,65	78,75
[B]	CAMPO MAGNETICO 40 gauss					[B']	SENZA CAMPO				
84	2503	13, 6	9 0	60	79	144	2474	14, 1	8 47	61	82
86	2520	12, 6	10 5	60	77	146	2482	13, 2	9 55	60	78
88	2418,5	15, 0	10 58	61	80	148	2505	15, 4	9 13	61	79
90	2515,5	14, 2	10 39	60	78	150	2500	15, 8	9 7	61	80
92	2507,5	13, 6	9 36	59	77	152	2438	15, 2	9 3	61	80
94	2451	14, 0	9 30	61	79	154	2495	14, 6	9 56	60	78
96	2461,5	13, 7	10 29	60	78	156	2497	15, 0	9 47	61	80
98	2495	13, 4	8 54	60	76	158	2464	13, 9	9 49	61	80
100	2438	15, 6	9 45	61	79	160	2462	14, 7	9 46	60	78
102	2448	14, 5	9 46	61	79	162	2446,5	13, 4	9 38	60	77
Medie	2475,8		9 52	60,3	78,2	Medie	M = 2476,3		9 30	60,6	79,2

$$\begin{array}{l} 2475{,}8 - \\ \underline{2473{,}7} \\ \Delta = 2{,}1 \end{array} \qquad \frac{1000\,\Delta}{M} = 0{,}85 \qquad \begin{array}{l} 2477{,}9 - \\ \underline{2476{,}3} \\ \Delta = 1{,}6 \end{array} \qquad \frac{1000\,\Delta}{M} = 0{,}65$$

[1] Le cifre riportate sono sempre le medie tra quelle ottenute in due esperienze consecutive, e ciò per avere valori più concordanti.

[2] Non fu fatta correzione alcuna per le variazioni di temperatura, poichè nelle misure riferite nella presente tabella si avevano solo delle differenze di un decimo di grado la cui influenza era trascurabile.

TABELLA III.

Numero d'ordine	P	t	P′	T	l_i	l_f	Numero d'ordine	P	t	P′	T	l_i	l_f
[A]		SENZA CAMPO					[A′]		CAMPO MAGNETICO 500 gauss				
	gr.	°		m s	mm	mm		gr.	°		m s	mm	mm
184	2439	24, 5		10 8	63	80	226	2395	26, 6		10 12	62	81
186	2435	24, 2		10 9	64	81	228	2497	24, 0		10 5	61	81
188	2516	24, 8		10 21	61	79	230	2413	25, 4		10 7	62	81
190	2425	24, 3		10 1	62	81	232	2402	25, 0		10 6	64	83
192	2429	24, 3		10 13	62	80	234	2471	23, 8		10 30	63	82
194	2443	23, 4		10 9	63	80	236	2455,5	24, 7		9 54	62	81
196	2444	23, 8		10 13	62	80	238	2470,5	24, 9		9 50	62	81
[C]							[C′]						
212	2442	24, 6	gr. 2442	10 8	62	79	254	2393	27, 0	gr. 2395	10 8	63	78
214	2437	24, 5	2438	10 8	63	82	256	2494	24, 2	2495	9 56	61	80
216	2511	25, 0	2512	10 20	62	79	258	2415	25, 4	2415	10 8	62	82
218	2426	24, 4	2426	10 2	63	80	260	2402	25, 3	2403	10 4	64	76
220	2430	24, 5	2431	10 12	62	79	262	2466,5	24, 1	2468	10 25	63	81
222	2443	23, 6	2444	10 9	62	80	264	2455,5	25, 0	2457	9 55	63	81
224	2441,5	24, 1	2443	10 11	63	81	266	2470	25, 1	2471	9 54	62	80
	Medie		M = 2447,6	10 12	62,4	80,1		Medie		2443,4	10 5	62,4	80,6
[B]		CAMPO MAGNETICO 500 gauss					[B′]		SENZA CAMPO				
198	2443	24, 6	2443	10 9	63	81	240	2393	26, 8	2394	10 10	62	80
200	2438	24, 5	2439	10 7	63	82	242	2493	24, 2	2494	9 54	61	82
202	2516	25, 0	2517	10 24	63	79	244	2413	25, 5	2413	10 10	63	74
204	2428	24, 4	2428	10 4	62	82	246	2399	25, 2	2400	10 4	64	83
206	2430	24, 5	2431	10 13	62	80	248	2467	23, 9	2467	10 28	63	81
208	2444	23, 6	2445	10 8	62	79	250	2454	24, 8	2454	9 57	62	80
210	2444	24, 1	2445	10 11	62	80	252	2468,5	24, 9	2468,5	9 51	62	82
	Medie		2449,7	10 13	62,4	80,4		Medie		M = 2441,4	10 5	62,4	80,3

V = gr. 2447,3 V′= gr. 2447,2 V_c' = gr. 2448,0

$$\frac{\text{gr. } 2449{,}7 - 2447{,}6}{\Delta = 2{,}1} \qquad \frac{1000\,\Delta}{M} = 0{,}9$$

V = gr. 2443,4 V′= gr. 2442,3 V_c' = gr. 2443,4

$$\frac{\text{gr. } 2443{,}4 - 2441{,}4}{\Delta = 2{,}0} \qquad \frac{1000\,\Delta}{M} = 0{,}8$$

TABELLA IV.

Per i gruppi di misure [A], [B], [C].
V = gr. 2459,2 V′ = gr. 2456,7 V'_c = gr. 2459,3

gr. 2461,7 − 2459,3 = Δ = 2,4 $\qquad \frac{1000\,\Delta}{M} = 1{,}0$

Per i gruppi di misure [A′], [B′], [C′].
V = gr. 2446,2 V′ = gr. 2444,9 V'_c = gr. 2445,7

gr. 2445,9 − 2443,8 = Δ = 2,1 $\qquad \frac{1000\,\Delta}{M} = 0{,}9$

TABELLA V.

Numero d'ordine	P	t	P′	T	l_i	l_f	Numero d'ordine	P	t	P′	T	l_i	l_f
[A]		SENZA CAMPO					[A′]		CAMPO MAGNETICO 1400 gauss				
	gr.	°		m s	mm	mm		gr.	°		m s	mm	mm
340	2509	16, 7		10 39	62	81	376	2470	22, 6		10 21	64	82
342	2455	16, 8		10 12	63	82	378	2478	22, 0		10 36	62	81
344	2464	18, 0		10 57	61	79	380	2469	19, 3		10 43	63	83
346	2505	15, 5		10 48	63	83	382	2466,5	20, 5		10 32	63	81
348	2476	15, 7		10 18	64	82	384	2499	23, 6		10 53	63	81
350	2490	16, 1		11 3	62	80	386	2498,5	21, 4		10 36	62	81
[C]							[C′]						
364	2501,5	17, 5	gr. 2504,5	10 29	62	80	400	2459	23, 9	gr. 2464	10 15	64	82
366	2451	17, 5	2454	10 7	63	82	402	2477	23, 3	2482	10 32	62	80
368	2460	18, 5	2462	10 51	63	81	404	2463	20, 8	2469	10 43	63	82
370	2494	16, 3	2497	10 36	63	79	406	2469	21, 3	2472	10 32	62	81
372	2481	16, 6	2485	10 19	65	85	408	2489,5	24, 6	2493,5	10 52	63	81
374	2488,5	17, 1	2492,5	10 56	62	81	410	2500,5	22, 3	2504,5	10 34	62	82
	Medie		M = 2482,8	10, 32	62,75	81,25		Medie		2480,5	10 36	62,75	81,4
[B]		CAMPO MAGNETICO 1400 gauss					[B′]			SENZA CAMPO			
352	2510	16, 7	2510	10 31	62	81	388	2459	23, 7	2463	10 9	64	82
354	2458	16, 8	2458	10 7	63	82	390	2476	23, 0	2480	10 37	62	82
356	2467	18, 0	2467	10 48	61	81	392	2463	20, 5	2468	10 49	62	81
358	2504	15, 6	2504	10 38	63	82	394	2465,5	21, 0	2467,5	10 31	63	82
360	2484	15, 9	2485	10 20	65	84	396	2492	24, 6	2496	10 51	62	81
362	2494	16, 3	2495	10 58	62	80	398	2493	22, 9	2499	10 34	62	80
	Medie		2486,5	10 34	62, 7	81, 7		Medie		M = 2478,9	10 35	62,5	81,3

V = gr. 2482,3 V′ = gr. 2479,3 V'_c = 2482,5

gr. 2486,5 − 2482,8 = Δ = 3,7 $\qquad \frac{1000\,\Delta}{M} = 1{,}5$

V = gr. 2480,2 V′ = gr. 2476,3 V'_c = gr. 2480,8

gr. 2480,5 − 2478,9 = Δ = 1,6 $\qquad \frac{1000\,\Delta}{M} = 0{,}65$

3. Da queste ultime tabelle si vede come rimanga giustificato il procedimento seguito nella correzione della temperatura.

Infatti confrontando i valori V e V′ con V'_c rispettivamente, si ha il seguente prospetto:

Tabella	Campo magnetico in gauss	V	V′	V'_c	$V - V'$	$V - V'_c$
III	500	2447,3	2447,2	2448,0	+ 0,1	— 0,7
»	»	2443,4	2442,3	2443,4	+ 1,1	0
IV	900	2459,2	2456,7	2459,3	+ 2,5	— 0,1
»	»	2446,2	2444,9	2445,7	+ 1,3	+ 0,5
V	1400	2483,2	2479,3	2482,5	+ 3,9	+ 0,7
»	»	2480,2	2476,3	2480,8	+ 3,9	— 0,6

da cui appare che le differenze $V - V'$ sono tutte positive, e vanno crescendo col crescere del campo e quindi della differenza di temperatura, mentre le analoghe $V - V'_c$ hanno vario segno e sono inferiori ad 1 grammo, come s'era già trovato nelle misure di prova (1).

4. I risultati ottenuti nelle mie ricerche sono stati aggruppati nella seguente tabella:

Fili	Campo magnetico in gauss	L	Δ	$\frac{1000\Delta}{M}$	Fili	Campo magnetico in gauss	L	Δ	$\frac{1000\Delta}{M}$
		mm					mm		
X	210	— 0, 2	5,9	1, 0	R	500	+ 0, 3	2,0	0, 8
»	300	— 0, 9	5,0	0, 9	»	900	— 0.35	2,4	1, 0
»	900	+ 0, 1	4,7	0,85	»	»	0	2,1	0, 9
A	1100	0	3,5	1, 0	»	1400	+ 0, 5	3,7	1, 5
»	»	— 1, 1	3,0	0, 9	»	»	— 0,15	1,6	0,65
R	40	— 0,25	2,1	0,85					
»	»	— 0, 5	1,6	0,65				Media	0, 9
»	500	+ 0, 3	2,1	0, 9					

dove L esprime la variazione media dell'allungamento verificatosi nei fili magnetizzati sottoposti a trazione sino a rottura, e Δ, $\frac{1000\Delta}{M}$ hanno i soliti significati.

I valori di $\frac{1000\Delta}{M}$ sono sufficientemente concordanti per poter concludere *che il carico di rottura di un filo sottile di ferro ricotto subisce nel campo magnetico un aumento medio di 0,9 per mille.* Quanto poi alle variazioni del coefficiente d'allungamento, i valori di L sono tali da non permettere conclusione alcuna in proposito.

Tratterò tale argomento in un prossimo lavoro.

(1) Questi Rendiconti, pag. 115.

Fisica terrestre. — *Importante particolarità nei sismogrammi del R. Osservatorio Geodinamico di Rocca di Papa in occasione dei terremoti Calabri dell'8 settembre 1905 e 28 dicembre 1908.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio E. Millosevich.

Meteorologia. — *Gli Osservatorî del Monte Rosa in rapporto al servizio meteorologico.* Nota del dott. Camillo Alessandri, presentata dal Socio V. Volterra.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Su alcune reazioni dei nitroderivati* (1). Nota di Livio Cambi, presentata dal Corrispondente A. Angeli.

Da alcuni autori (2) furono studiate in questi ultimi anni varie ossidazioni compiute dai nitrati alcoolici, con le quali si volle confermata una formola di perossido, HO·O·NO, dell'acido nitrico: formola che già J. W. Brühl (3) aveva ammesso, deducendola dalle misure della dispersione e della rifrazione molecolare dei nitrati alcoolici.

I nitrati alcoolici ossidano, in presenza di alcali, il tiofenolo a bisolfuro di fenile, gli arseniti ad arseniati, i solfidrati alcalini a polisolfuri; con formazione di nitrito alcalino. Dai citati autori queste reazioni furono poste in relazione con la proprietà, nota da molto tempo, dei nitrati alcoolici $R{\cdot}CH_2{\cdot}NO_3$ di saponificarsi con gli alcali oltrechè in modo normale, con formazione di alcool e di nitrato

$$R{\cdot}CH_2{\cdot}NO_3 + KOH = R{\cdot}CH_2{\cdot}OH + KNO_3,$$

in maniera anormale generando aldeide e nitriti

$$R{\cdot}CH_2{\cdot}NO_3 + KOH = R{\cdot}CHO + KNO_2 + H_2O.$$

Il rapporto dei due sali, prodotti per saponificazione, dipende nei varî nitrati dal rapporto delle velocità delle due reazioni.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica farmaceutica del R. Istituto di studî superiori di Firenze.

(2) Klason u. Carlson, Berichte, 39, pag. 2752; idem, 40, pag. 4183; T. Carlson, idem, 40, pag. 4191; A. Gutmann, idem, 41, pag. 2052.

(3) J. W. Brühl, Berichte, 31, 1350.

La formazione di aldeide, le ossidazioni compiute vennero attribuite ad un perossido, $R{\cdot}CH_2{\cdot}O{\cdot}OH$, che si renderebbe libero nella saponificazione anomala del nitrato,

$$R{\cdot}CH_2{\cdot}NO_3 + KOH = R{\cdot}CH_2{\cdot}O{\cdot}OH + KNO_2.$$

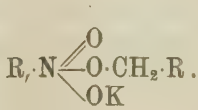
Il perossido si trasformerebbe successivamente in aldeide (1), ossiderebbe il tiofenato a bisolfuro di fenile, gli arseniti ad arsenati (2).

Prima di esaminare più intimamente questa ipotesi, voglio ricordare ed esporre alcuni processi di ossidazione compiuti dai nitroderivati aromatici che procedono in modo del tutto analogo a quelli studiati nei nitrati alcoolici, e precisamente la reazione più spesso usata per preparare gli azossiderivati: azione degli alcoolati sui nitroderivati aromatici. Poi, la riduzione pure ad azossicomposti operata sui nitroderivati dagli arseniti alcalini (3): possono ridursi con questo metodo in soluzione acquosa numerosi nitroacidi aromatici. Infine citerò una reazione che io ho studiata fra m-nitrobenzoato e tiofenato di potassio; facendo reagire i due sali, nelle proporzioni volute, in soluzione acquosa $\frac{2}{1}$ M alla temperatura di circa 120° per alcune ore in atmosfera inerte; si ha riduzione dell'acido m-nitrobenzoico ad a. m-azossibenzoico ed ossidazione del mercaptano a bisolfuro.

In queste reazioni dei nitroderivati è lecito supporre che in una prima fase essi si riducano a nitrosoderivati; che questi poi per azione degli alcali generino azossicomposti (4). L'analogia, sotto questo punto di vista, delle reazioni dei nitroderivati con quelle dei nitrati alcoolici è evidente: il nitrito che si forma dai nitrati corrisponde al nitrosoderivato. Nel caso del tiofenolo avremo le reazioni

$$R{\cdot}CH_2{\cdot}O{\cdot}NO_2 + 2C_6H_5{\cdot}SK + H_2O = KO{\cdot}NO + (C_6H_5)_2S_2 + KOH + R{\cdot}CH_2{\cdot}OH,$$
$$R{\cdot}NO_2 + 2C_6H_5{\cdot}SK + H_2O = R{\cdot}NO + (C_6H_5)_2S_2 + 2KOH.$$

La riduzione compiuta dagli alcoolati sui nitroderivati è pure analoga alla riduzione a nitrito, con formazione di aldeide, nella saponificazione anomala dei nitrati alcoolici $R{\cdot}CH_2{\cdot}NO_3$. Nell'azione degli alcoolati $R{\cdot}CH_2{\cdot}OM$ sui nitroderivati si formerà certo in una prima fase aldeide, che nell'ambiente fortemente alcalino si trasformerà ulteriormente. La formazione di aldeide può ricondursi in entrambi i casi alla stessa reazione; ricordando che gli alcoolati alcalini si addizionano ai nitroderivati per dare composti del tipo



(1) Klason u. Carlson, loc. cit.
(2) Gutmann, loc. cit.
(3) Lösner, Berichte, 28 Refer., pag. 125.
(4) E. Bamberger, Berichte, 33, pag. 1939.

Le due reazioni potranno rappresentarsi, ponendo con Nef (1) che si addizioni al nitrato alcoolico nel processo di saponificazione una molecola KOH,

$$R{\cdot}CH_2{\cdot}O{\cdot}N\begin{matrix}O\\ \diagup\\ OH\\ \diagdown\\ OK\end{matrix} \longrightarrow R{\cdot}CHO + KO{\cdot}NO + H_2O$$

$$R{\cdot}CH_2{\cdot}O{\cdot}N\begin{matrix}O\\ \diagup\\ R_1\\ \diagdown\\ OK\end{matrix} \longrightarrow R{\cdot}CHO + R_1{\cdot}NO + KOH\,.$$

E l'influenza del radicale alcoolico procede nell'istessa maniera: aumentando l'ossidabilità dell'alcool aumenta la quantità di nitrito nella saponificazione (2); così l'alcoolato etilico è più attivo dell'alcoolato metilico nelle riduzioni dei nitroderivati (3).

L'analogia di comportamento fra il gruppo $-NO_2$ dei nitroderivati e quello dei nitrati alcoolici, risiede nell'identità della struttura dei due gruppi nitrici. I veri nitroderivati si possono ottenere anche per nitrazione con i nitrati alcoolici, in presenza di alcoolato:

$$>CH_2 + R{\cdot}O{\cdot}NO_2 = >CH{\cdot}NO_2 + R{\cdot}OH\,.$$

Le ossidazioni, che ho sopra considerate, compiute dalle due classi di derivati, sono dovute alla tendenza che l'azoto pentavalente ha nei composti nitrici studiati di ridursi a trivalente, in ambiente alcalino; le formole

$$R{\cdot}O{\cdot}N\begin{matrix}O\\ \diagdown\\ O\end{matrix}\,, \quad R_1{\cdot}N\begin{matrix}O\\ \diagdown\\ O\end{matrix}$$

rendono ragione dell'analogia di comportamento di questi corpi. L'esistenza dei doppî legami fra azoto e ossigeno è provata anche dalle condensazioni dei nitroderivati con l'idrossilamina, con l'anilina. Anche il comportamento come esplosivi di molti composti appartenenti alle due classi di derivati si spiega in base all'analogia della loro struttura (4).

Come ho già accennato Klason e Carlson emisero l'ipotesi che ai nitrati spetti la formola R·O·O·NO. E che la saponificazione anormale con gli alcali dei nitrati alcoolici non sia che la reversione della sintesi di questi per azione dell'acido nitroso sui perossidi R·O·OH (5). Baeyer e Villiger

(1) Nef, Annalen, 309, pag. 182.

(2) Nef, loc. cit., pag. 183.

(3) Lobry de Bruyn, Berichte, 26, pag. 269. Agendo con gli alcolati sui nitrati alcoolici sarà possibile la formazione di composti del tipo $\begin{matrix}R{\cdot}CH_2{\cdot}O\\ R_1{\cdot}CH_2{\cdot}O\end{matrix}\!\!>\!N\begin{matrix}O\\ \diagdown\\ OK\end{matrix}$. Si presenta il problema: quale dei due radicali alcolici prenderà parte alla riduzione. Ho intenzione di approfondire lo studio in proposito.

(4) Van t'Hoff, Vorlesungen, III, pag. 112.

(5) Baeyer u. Villiger, Berichte, 34, pag. 761.

supposero come termine intermedio l'etere pernitroso R·O·O·NO, che poi si trasforma in nitrato.

Le reazioni dei nitroderivati che ho citate contradicono l'ipotesi che i nitrati abbiano la costituzione R·O·O·NO; però pure stabilito che essi abbiano la struttura $R{\cdot}O{\cdot}N\begin{matrix}O\\ \diagup\\ \diagdown\\ O\end{matrix}$ si potrebbe supporre che per riduzione dell'azoto si formi nella saponificazione un perossido,

$$R{\cdot}CH_2{\cdot}O{\cdot}N\begin{matrix}O\\ \diagup\\ \diagdown\\ O\end{matrix} \longrightarrow R{\cdot}CH_2{\cdot}O{\cdot}OH + HONO;$$

e che questo, come Klason e Carlson suppongono, si trasformi successivamente in aldeide, oppure compia le varie ossidazioni. Ma i caratteri dei perossidi $R{\cdot}CH_2{\cdot}O{\cdot}OH$, descritti da Baeyer e Villiger rendono senz'altro inammissibile questa ipotesi. Nef ha osservato [1] che anche a freddo la potassa alcoolica saponifica il nitrato di etile con formazione di aldeide; quindi la trasformazione dovrebbe avvenire facilmente: invece il perossido $C_2H_5{\cdot}O{\cdot}OH$ mostra una notevole stabilità in soluzione alcalina, per il suo carattere debolmente acido. Infatti Baeyer e Villiger [2] concentrano a 30° soluzioni fortemente alcaline del perossido; evaporando nel vuoto soluzioni pure alcaline ottengono i sali corrispondenti $C_2H_5{\cdot}O{\cdot}O{\cdot}M$; senza notare la voluta trasformazione in aldeide.

Carlson, per dimostrare la formazione del perossido suppone la reazione

$$R{\cdot}O{\cdot}OH + H_2O_2 = R{\cdot}OH + H_2O + O_2,$$

fra acqua ossigenata e perossido, che egli studia saponificando la nitroglicerina in presenza di acqua ossigenata: però anche questa reazione è contraddetta dai caratteri dei perossidi. Baeyer e Villiger hanno preparato i perossidi R·O·OH per azione di un eccesso di acqua ossigenata sui solfati alcoolici in presenza di grandi quantità di alcali. E, il rendimento in perossido è tanto maggiore quanto più è notevole l'eccesso di acqua ossigenata impiegata.

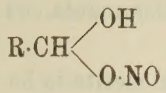
Non discuto a quale reazione sia dovuto l'ossigeno che Carlson ha misurato nella saponificazione della nitroglicerina; se alle proprietà riducenti dell'H_2O_2, se a reazioni più complesse; per decidere forse occorrerebbe estendere quella reazione agli altri nitrati, specie ai più semplici.

Non si hanno dati sufficienti per stabilire quale sia il meccanismo intimo della formazione di aldeide, nella saponificazione dei nitrati; se si debba alla ossidazione dell'achilidene $R{\cdot}CH<$ operata dall'acido nitrico

(1) Nef, loc. cit.

(2) Baeyer u. Villiger, loc. cit., pag. 739.

come suppone Nef (1), oppure se alla formazione labile del composto



ammesso da Vignon e Maquenne (2). Certo, la seconda ipotesi si presenta più naturale, essa ricondurrebbe la formazione di aldeide alla semplice migrazione di un atomo di ossigeno dall'azoto al carbonio; reazione di tipo molto frequente.

Klason, Carlson, Gutmann dall'ipotesi che ai nitrati spetti la struttura R·O·O·NO deducono una formola analoga per l'acido nitrico: HO·O·NO. Pur tralasciando di considerare le varie reazioni di quest'acido in base a quella formola, voglio ricordare una reazione che è in evidente contrasto con il comportamento dei perossidi: l'ossidazione quantitativa dell'a. nitroso ad a. nitrico con il permanganato.

All'acido nitrico spetta l'antica formola; in accordo con la posizione dell'azoto nel sistema periodico degli elementi, in relazione con i composti ossigenati degli elementi appartenenti allo stesso gruppo dell'azoto.

Mineralogia. — *Sulla identità della belonesite con la sellaite.* Nota di Ferruccio Zambonini, presentata dal Socio G. Strüver.

Sotto il nome di belonesia, cambiato in belonesite dal Dana (3), Arcangelo Scacchi (4) descriveva brevemente nel 1883 un minerale trovato in forma di esilissimi aghetti trasparenti, bianchi, in un frammento di antica roccia vulcanica inviluppato nella lava vesuviana del 1872. La descrizione completa e definitiva fu pubblicata soltanto nel 1886, a causa delle difficoltà incontrate nel determinare la composizione chimica del nuovo minerale, quindici cristalli del quale non pesavano più di un milligrammo.

Le caratteristiche della belonesite sono, secondo A. Scacchi, le seguenti: Sistema cristallino tetragonale: $a : c = 1 : 0{,}6605$. Forme osservate $\{100\}$, $\{110\}$, $\{111\}$. Durezza 5. Al cannello fonde con difficoltà: l'acido cloridrico non la scioglie. In base ad alcune reazioni qualitative la belonesite dovrebbe essere un molibdato di magnesio.

Ulteriori studî sulla belonesite sono stati eseguiti solo recentemente dal

(1) Nef, loc. cit.

(2) Vignon et Maquenne, Annales (6), 24, pag. 522.

(3) *System of Mineralogy*, 6th Ed. 992.

(4) *Sopra un frammento di antica roccia vulcanica inviluppata nella lava vesuviana del 1872.* Sunto nel Rend. della R. Acc. delle Scienze fis. e mat. di Napoli, 1883, 281. Memoria completa, negli Atti della stessa Accademia, V, n° 1.

Lacroix (1), il quale si è limitato a constatare l'esistenza della sfaldatura secondo il prisma tetragonale dominante, ed il carattere ottico positivo del minerale.

Sulla vera natura della belonesite io ho avuto da parecchio tempo gravi dubbî, le proprietà di questo minerale poco conciliandosi con la sua supposta probabile composizione chimica esprimibile mediante la formula $Mg\,Mo\,O_4$. È perciò con gran piacere che io ho profittato del cortese permesso del prof. Eugenio Scacchi di poter esaminare i campioni originali sui quali fu fondata la specie, per poter anche di questa dare nuove notizie in un lavoro generale al quale da tempo attendo sui minerali del Vesuvio. Rimandando a quel lavoro una descrizione più completa delle proprietà e della paragenesi della belonesite, mi limiterò a riferire nella presente notizia preliminare i risultati delle ricerche che mi hanno condotto ad identificare questo minerale vesuviano con la sellaite scoperta quarantun'anni or sono dal professore Strüver (2).

Le misure da me eseguite sui cristallini di belonesite mi hanno permesso di confermare completamente quelle pubblicate da A. Scacchi e dovute al prof. Eugenio Scacchi. Ho anch'io trovato, come Lacroix, che la belonesite è otticamente positiva: avendo rinvenuto dei cristallini nei quali i prismi $\{100\}$ e $\{110\}$ avevano grandezza poco diversa, ho potuto constatare che la sfaldatura avviene parallelamente ad ambedue.

La determinazione degli indici di rifrazione, eseguita mediante un prisma naturale formato da una faccia di $\{100\}$ e da una di $\{110\}$ facente con la prima un angolo vero di 44°58′, dette il seguente risultato:

$$\omega_{Na} \quad 1.3775$$
$$\varepsilon_{Na} \quad 1.3889$$
$$\varepsilon - \omega = 0.0114\,.$$

Questi indici di rifrazione così bassi, inferiori a quello della fluorite, mi dimostrarono senz'altro che la belonesite non poteva certamente essere un molibdato di magnesio $Mg\,Mo\,O_4$, ma che, invece, con tutta probabilità doveva appartenere ai fluoruri, per i quali in generale l'indice di rifrazione è molto basso, come aveva osservato già il Berzelius. E pensando che, come giustamente aveva notato il Dana, la belonesite ha una forma cristallina prossima a quella dei minerali del gruppo del rutilo, era naturale pensare a riferire il minerale vesuviano alla sellaite, la cui forma presenta la stessa caratteristica. Ed il confronto fra i due minerali ne dimostrò già a questo punto la identità.

(1) *Étude minéralogique des produits silicatés de l'éruption du Vésuve (Avril 1906).* Nouvelles Archives du Muséum, 1907 (4ème Série) IX, 69, nota 4.

(2) *Sulla Sellaite, nuovo minerale di fluorio* Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, adun. del 15 nov. 1868.

Ambedue, infatti, si presentano in cristalli con abito prismatico, incolori (1), trasparenti, con vivo splendore vitreo, e presentano le stesse sfaldature. Per i valori angolari si ha:

	Belonesite	*Sellaite*	
	(Scacchi)	(Strüver)	(A. Sella) (2)
(110) : (111) =	46°57′	46°53 ½′	46°59 ½′

La durezza nei due minerali è la stessa (5). Per la rifrazione e la birifrazione A. Sella e E. Mallard ottennero nella sellaite:

	A. Sella	E. Mallard (3)
ω	1.3780	1.379
ε	1.3897	1.389
$\varepsilon - \omega$	0.0117	0.010

dei valori, cioè, vicinissimi a quelli trovati per la belonesite.

Col metodo della sospensione, adoperando il tetrabromuro di metilene e la bilancia di Westphal, ho determinato il peso specifico della belonesite ed ho ottenuto 2.96 a + 12°. Per la sellaite di Gebroulaz, Strüver dà 2.972 A. Sella 3.15 e Cossa, per i cristalli artificiali, 2.857. Come si vede, anche pel peso specifico belonesite e sellaite sono identiche. Il valore trovato costituisce, del resto, una nuova conferma della impossibilità che i cristallini vesuviani appartengano ad un molibdato di magnesio anidro.

Come ha già osservato Scacchi, la belonesite non è attaccata dall'acido cloridrico ed al cannello fonde. Uguale è, secondo Strüver, il comportamento della sellaite.

Benchè, in base a quanto si è detto, non potesse sorgere dubbio sulla identità della belonesite e della sellaite, ho creduto opportuno eseguire qualche ricerca qualitativa sui cristallini vesuviani. Soltanto sacrificando buona parte di uno dei pochissimi campioni del Museo di Napoli è stato possibile riunire alcuni milligrammi di materiale puro, il quale mi ha permesso di constatare che la belonesite è attaccata dall'acido solforico con sviluppo di acido fluoridrico, nettamente riconosciuto per la forte azione corrosiva esercitata sul vetro. Dopo aver scaldato fino a scomparsa quasi completa dei vapori di anidride solforica, lasciai raffreddare perfettamente. Il residuo era bianco: anche alitandovi sopra a più riprese, come consiglia P. Truchot (4), non fu

(1) A torto Scacchi ha descritto i cristallini di belonesia come bianchi, mentre sono, in realtà, quasi sempre incolori.

(2) *Sulla sellaite e sui minerali che l'accompagnano.* Memorie R. Accad. Lincei, 1888, (4ª), IV, 455.

(3) *Sur la Sellaïte.* Bull. Soc. franç. de Minér. 1888, XI, 302.

(4) Annales de Chemie analytique, vol. X, 254.

possibile scorgere il minimo accenno a quella colorazione azzurra caratteristica che si sviluppa in presenza anche di sole tracce di molibdeno. Dalla soluzione acquosa del residuo potei ottenere dei cristallini nitidi di fosfato ammonico-magnesiaco che fu facile riconoscere al microscopio. Con i saggi riferiti si dimostrò, quindi, che la belonesite contiene fluoro e magnesio, mentre non si riuscì a confermare l'esistenza in essa del molibdeno.

L'errore nel quale incorse A. Scacchi si spiega facilmente con la lettura della sua Memoria, dalla quale risulta che le reazioni del molibdeno si ottennero dai prodotti della fusione della belosenite sia col borace che col carbonato sodico, ma che erano rimasti *per circa tre anni* abbandonati: in tali condizioni non è certamente improbabile ammettere o uno scambio di recipienti o un inquinamento.

Con la dimostrata identità della belonesite e della sellaite viene accertato un nuovo giacimento del raro fluoruro di magnesio che G. Strüver dedicava a Quintino Sella, e finora trovato con certezza, almeno che io sappia, soltanto a Gebroulaz, in Savoia. Diversa, per altro, è la origine della sellaite nelle due località. Mentre a Gebroulaz è, infatti, secondo A. Sella, un deposito di soluzioni, al Vesuvio, costituisce, invece, indubbiamente un minerale formatosi per sublimazione. Alle diverse condizioni di formazione deve con tutta probabilità ascriversi il fatto che, mentre nei cristalli vesuviani la forma terminale predominante (anzi, forse, la sola esistente) è }111{, in quelli di Gebroulaz, molto più ricchi di facce, domina }101{. Particolarmente importante è il ritrovarsi della sellaite sia a Gebroulaz che al Vesuvio in stretta associazione con l'anidrite ad onta della completa diversità genetica delle due giaciture, e questo fatto merita senza dubbio tutta l'attenzione degli studiosi.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta la seconda serie degli *Études sur Léonard da Vinci, ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu*, inviata in dono dall'autore prof. Duhem unitamente ad una lettera riassuntiva diretta al Presidente, la quale verrà inserita nei Rendiconti (1).

(1) V. pag. 286.

E. M.